Décomposition de Dunford via la méthode de Newton

Salim Rostam

24 mars 2014

Référence : J.-J. Risler et P. Boyer, *Algèbre pour la licence 3*.

Soit k un sous-corps de $\mathbb{C}$; on va démontrer le théorème suivant.

Théorème 1 (décomposition de Dunford)**.** *Si χ_u est scindé sur k, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :*

- *d est diagonalisable ;*
- *n est nilpotent ;*
- *$u = d + n$;*
- *d et n commutent.*

De plus, d et n sont des polynômes en u et on peut les déterminer sans connaître les valeurs propres de u.

On suppose donc que χ_u est scindé sur k, et on considère $P \in k[X]$ la partie sans facteur carré de χ_u, c'est-à-dire $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}(X - \lambda)$. L'heuristique de la démonstration de l'existence d'une décomposition est la suivante : on va trouver une « racine » $d \in \mathcal{L}(E)$ de P (c'est-à-dire $P(d) = 0$) en adaptant la méthode de Newton que l'on connaît pour trouver un zéro d'une fonction réelle. On démontrera alors que d est l'endomorphisme diagonalisable du théorème. Ainsi, on cherche à définir la suite suivante :

$$\begin{cases} u_0 := u \\ \forall i \in \mathbb{N}, u_{i+1} := u_i - P(u_i)[P'(u_i)]^{-1} \end{cases}$$

On va montrer par récurrence que $\forall i \in \mathbb{N}$:

($\mathcal{P}_i^0$) u_i est bien défini ;

($\mathcal{P}_i^1$) u_i est un polynôme en u ;

($\mathcal{P}_i^2$) $P(u_i) = P(u)^{2^i} v_i$ où $v_i \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme en u ;

($\mathcal{P}_i^3$) $P'(u_i)$ est inversible.

Avant de commencer, énonçons deux petits lemmes.

Lemme 2. *Si $v \in \mathrm{GL}(E)$ alors v^{-1} est un polynôme en v.*

Lemme 3. *$P(u)$ est nilpotent.*

Démonstration. On utilise simplement le théorème de Cayley–Hamilton et la définition de P, qui permet d'affirmer que $\chi_u | P^m$ pour $m \in \mathbb{N}$ assez grand. $\square$

Initialisation. Tout d'abord, $u_0 = u$ est bien défini, est bien un polynôme en u et comme $\mathrm{id}_E = 1(u)$ on a bien $P(u_0) = P(u)^{2^0} v_0$ avec $v_0 = \mathrm{id}_E \in k[u]$. Comme P est sans facteur carré et que k est de caractéristique nulle, on a $P \wedge P' = 1$. Ainsi, il existe $U, V \in k[X]$ tels que $UP + VP' = 1$ et donc $U(u)P(u) + V(u)P'(u) = \mathrm{id}_E$ donc $V(u)P'(u) = \mathrm{id}_E - U(u)P(u)$. Or, par le lemme 3 l'endomorphisme $P(u)$ est nilpotent ; ainsi, comme $U(u)$ et $P(u)$ commutent (ce sont des polynômes en u), l'endomorphisme $U(u)P(u)$ reste nilpotent. Finalement on en déduit que $V(u)P'(u) = \mathrm{id}_E - U(u)P(u)$ est inversible [1] et donc que $P'(u)$ est inversible.

Hérédité. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathcal{P}_i^0)$ u_i soit bien défini, $(\mathcal{P}_i^1)$ u_i soit un polynôme en u, $(\mathcal{P}_i^2)$ $P(u_i) = P(u)^{2^i} v_i$ avec $v_i \in k[u]$ et $(\mathcal{P}_i^3)$ $P'(u_i)$ soit inversible ; en particulier, $u_{i+1} = u_i - P(u_i)[P'(u_i)]^{-1}$ est bien défini et on a donc $(\mathcal{P}_{i+1}^0)$. Par le lemme 2, $[P'(u_i)]^{-1}$ est un polynôme en $P'(u_i)$ et ainsi $[P'(u_i)]^{-1}$ est un polynôme en u_i. Finalement, u_{i+1} est un polynôme en u_i et donc par $(\mathcal{P}_i^1)$ on conclut que u_{i+1} est un polynôme en u ce qui fournit $(\mathcal{P}_{i+1}^1)$.

En écrivant le développement de Taylor de P à l'ordre 2, on trouve Q dans $k[X, Y]$ tel que :

$$P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2 Q(X, Y)$$

En substituant à X l'endomorphisme u_i et à Y la différence $u_{i+1} - u_i$, comme ces deux endomorphismes commutent (ce sont des polynômes en u) on obtient :

$$P(u_{i+1}) = P(u_i) + (u_{i+1} - u_i)P'(u_i) + (u_{i+1} - u_i)^2 Q(u_i, u_{i+1} - u_i)$$

Or, par définition de u_{i+1} on a $P(u_i) + (u_{i+1} - u_i)P'(u_i) = 0$; on récupère ainsi :

$$P(u_{i+1}) = (u_{i+1} - u_i)^2 Q(u_i, u_{i+1} - u_i) = (u_{i+1} - u_i)^2 \widetilde{Q}(u)$$

pour un certain $\widetilde{Q} \in k[X]$. Or, $u_{i+1} - u_i = P(u_i)[P'(u_i)]^{-1}$ donc on a :

$$P(u_{i+1}) = [P(u_i)]^2 \left([P'(u_i)]^{-1}\right)^2 \widetilde{Q}(u)$$

On sait par $(\mathcal{P}_i^2)$ que $P(u_i) = P(u)^{2^i} v_i$ avec $v_i \in k[u]$ et on a déjà vu que $[P'(u_i)]^{-1} \in k[u_i] \subseteq k[u]$ donc on obtient finalement :

$$P(u_{i+1}) = \left[P(u)^{2^i} v_i\right]^2 \widetilde{\widetilde{Q}}(u) = P(u)^{2^{i+1}} v_{i+1}$$

avec $v_{i+1} \in k[u]$, ce qui constitue $(\mathcal{P}_{i+1}^2)$. En particulier, comme $P(u)$ est nilpotent et que $P(u)$ et v_{i+1} commutent on obtient que $P(u_{i+1})$ est nilpotent. Comme lors de l'initialisation, on a $V(u_{i+1})P'(u_{i+1}) = \mathrm{id}_E - U(u_{i+1})P(u_{i+1})$ qui est donc inversible. Ainsi, $P'(u_{i+1})$ est inversible ce qui montre $(\mathcal{P}_{i+1}^3)$ et achève la démonstration de l'hérédité.

Ainsi, par récurrence on a montré que la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bien définie ainsi que chaque propriété $(\mathcal{P}_i^j)$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$ et pour chaque $i \in \mathbb{N}$.

1. C'est un lemme classique ; on peut exhiber l'inverse sous la forme de la somme partielle d'une série géométrique.

Fin de la démonstration de l'existence. Si i_0 est un entier tel que $2^{i_0} \geqslant \dim E$ alors comme $P(u)$ est nilpotent (lemme 3) on a $P(u)^{2^{i_0}} = 0$: en effet, par le théorème de Cayley–Hamilton on a $P(u)^{\dim E} = 0$. Ainsi, pour $i \geqslant i_0$ on a $P(u_i) = P(u)^{2^i} v_i = 0$ donc $u_{i+1} = u_i$. On a donc obtenu deux choses :

– la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (au moins) à partir du rang i_0 ;

– u_{i_0} est annulé par le polynôme P.

Le polynôme P étant scindé à racines simples, on en déduit que $d := u_{i_0}$ est diagonalisable. Reste à montrer que $n := u - u_{i_0}$ est nilpotent !

Pour cela, on écrit que $u - u_{i_0} = \sum_{i=0}^{i_0-1}(u_i - u_{i+1})$. Or, $u_i - u_{i+1} = P(u_i)[P'(u_i)]^{-1}$ donc comme $P(u_i)$ est nilpotent (car $P(u_i) = P(u)^{2^i} v_i$) et commute avec $[P'(u_i)]^{-1}$ (d'après la propriété $(\mathcal{P}_i^1)$ on travaille dans $k[u]$ donc tout commute), $u_i - u_{i+1}$ est également nilpotent. Encore une fois, tous les u_i sont des polynômes en u donc les $u_i - u_{i+1}$ commutent donc $u - u_{i_0}$ est nilpotent, et c'est un polynôme en u car u_{i_0} est un polynôme en u d'après $(\mathcal{P}_{i_0}^1)$. Finalement, (d, n) est bien un couple qui vérifie les conditions du théorème.

Unicité. Soit (d', n') un autre couple qui vérifie les conditions du théorème. On a $u = d' + n'$ donc comme d' commute avec n', d' commute également avec u. Comme d est un polynôme en u, on en déduit que d' commute également avec d. De même, on montre que n' commute avec n. Ainsi, $d - d' = n - n'$ est un endomorphisme qui est à la fois diagonalisable et nilpotent donc il est nul, donc $d = d'$ et $n = n'$.

Remarque 4. Il faut signaler que puisque k est de caractéristique nulle, le polynôme P (partie sans facteur carré de χ_u) s'obtient par la formule $P = \frac{\chi_u}{\chi_u \wedge \chi_u'}$.