Couronnes biholomorphes

Leçons 203, 207, 219, 223, 245
Salim Rostam

19 mai 2014

Remarque préliminaire. Un théorème dû à B. Riemann[1] stipule que tout ouvert non vide simplement connexe (« sans trou ») de $\mathbb{C}$ et différent de $\mathbb{C}$ est biholomorphe (*i.e.* il existe une bijection holomorphe d'inverse holomorphe) au disque unité. Ce développement regarde ce qui se passe dans un cas particulier où l'ouvert « possède un trou ».

Définition. *Pour $0 < r < R < \infty$, on définit la couronne $\mathcal{C}(r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.*

Propriété. *Si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{C}(r, R)$ et $\mathcal{C}(\lambda r, \lambda R)$ sont biholomorphes.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'homothétie de rapport λ, qui est un biholomorphisme de $\mathcal{C}(r, R)$ sur $\mathcal{C}(\lambda r, \lambda R)$. □

Théorème. *C'est une équivalence, à savoir si $\mathcal{C}(r_1, R_1)$ et $\mathcal{C}(r_2, R_2)$ sont biholomorphes alors il existe $\lambda > 0$ tel que $r_2 = \lambda r_1$ et $R_2 = \lambda R_1$.*

1 Préliminaire

Quitte à composer par des homothéties — qui sont, comme on l'a déjà remarqué plus haut, des biholomorphismes —, on peut supposer que $r_1 = r_2 = 1$; de plus, on suppose que $R_1 \leq R_2$. Ainsi, les couronnes $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C}(1, R_1)$ et $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}(1, R_2)$ sont biholomorphes et $1 < R_1 \leq R_2$; on veut montrer que $R_1 = R_2$.

Soit $f : \mathcal{C}(1, R_1) \to \mathcal{C}(1, R_2)$ un biholomorphisme (un tel biholomorphisme existe puisque les couronnes sont justement biholomorphes). L'idée est de montrer que f est de la forme $z \mapsto Cz^\alpha$, avec $\alpha := \frac{\log R_2}{\log R_1} \geq 1$ (pour « envoyer R_1 sur R_2 »).

Considérons l'application $u : \mathcal{C}_1 \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$\forall z \in \mathcal{C}_1, u(z) := \log |f(z)| - \alpha \log |z|$$

(les logarithmes sont bien définis car pour $z \in \mathcal{C}_1$ on a $|z| > 1$ donc $|z| \neq 0$ et $f(z) \in \mathcal{C}_2$ donc $|f(z)| > 1$ en particulier $|f(z)| \neq 0$). En utilisant le principe du maximum pour les fonctions partant d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on va montrer que u est la fonction nulle.

1. C'est le théorème de l'application conforme, en anglais *Riemann mapping theorem.*

2 Harmonicité de u sur $\mathcal{C}_1$

Notons $\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ et $\partial_{\bar z} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$: on a $\partial_{\bar z}\partial_z = \frac{1}{4}(\partial_{xx} + \partial_{yy})$ donc il suffit de vérifier que $\partial_{\bar z}\partial_z u = 0$ (on considère u comme partant du sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ correspondant à $\mathcal{C}_1$). Remarquons deux choses :

- les opérateurs ∂_z et $\partial_{\bar z}$ héritent des règles de dérivation usuelles ;
- si g est dérivable alors $\partial_z \bar g = \frac{1}{2}(\partial_x \bar g - i\partial_y \bar g) = \frac{1}{2}(\overline{\partial_x g} - i\overline{\partial_y g}) = \overline{\partial_{\bar z} g}$ (note [2]).

Avant de se lancer dans les calculs, réécrivons u de la façon suivante :

$$u(z) = \frac{1}{2}\left(\log|f(z)|^2 - \alpha \log|z|^2\right) = \frac{1}{2}\left[\log(f\bar f) - \alpha\log(z\bar z)\right]$$

ce qui montre que u est de classe $\mathcal{C}^2$.

On a donc $2\partial_z u = \frac{(\partial_z f)\bar f + f\partial_z \bar f}{f\bar f} - \alpha\frac{(\partial_z z)\bar z + z\partial_z\bar z}{z\bar z}$; par une remarque précédente, on a $\partial_z \bar f = \overline{\partial_{\bar z} f} = 0$ car f est holomorphe (et par le même argument $\partial_z \bar z = 0$). Pour la même raison, $\partial_z f$ est alors f' donc on obtient :

$$\partial_z u = \frac{1}{2}\left(\frac{f'}{f} - \frac{\alpha}{z}\right)$$

Finalement, comme les fonctions du membre de droite sont holomorphes, leur dérivée par rapport à $\partial_{\bar z}$ sont nulles donc on obtient $\partial_{\bar z}\partial_z u = 0$, *i.e.* u est harmonique.

3 Prolongement continu de u à $\overline{\mathcal{C}_1}$

Pour pouvoir appliquer le principe du maximum à u, on va la prolonger sur $\partial\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ ou } |z| = R_1\}$. Pour ce faire, il suffit de regarder le comportement de $|f(z)|$ quand $|z| \to 1$ (cf. définition de u).

Ainsi, soit $(z_n) \in \mathcal{C}_1^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un complexe de module 1 et soit ℓ une valeur d'adhérence de $(f(z_n))$ (une telle valeur d'adhérence existe car $(f(z_n))$ est à valeurs dans le compact $\overline{C_2}$) ; on note (n_k) l'extractrice correspondante. On a $\ell \in \overline{C_2}$; si $\ell \in \mathcal{C}_2$, alors comme f est bijective il existe $z \in \mathcal{C}_1$ tel que $f^{-1}(\ell) = z$. Comme f^{-1} est holomorphe, elle est en particulier continue donc on a $f^{-1}(f(z_{n_k})) = z_{n_k} \to z$. C'est absurde puisque $|z_{n_k}| \to 1$ et $|z| > 1$! Donc $\ell \in \partial\mathcal{C}_2$, *i.e.* $|\ell| \in \{1, R_2\}$.

On vient donc de montrer que si $(z_n) \in \mathcal{C}_1^{\mathbb{N}}$ converge en module vers 1 alors les valeurs d'adhérence de $(|f(z_n)|)$ sont 1 ou R_2. On va maintenant montrer que c'est tout le temps la même : ainsi, la suite $(|f(z_n)|)$ possède une unique valeur d'adhérence et, étant à valeurs dans le compact $[1, R_2]$, elle converge vers cette valeur d'adhérence.

Soit $K := \mathcal{S}(0, \sqrt{R_2}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{R_2}\}$; l'ensemble K est compact et comme $1 < R_2$ on a l'inclusion $K \subseteq \mathcal{C}_2$. Comme f^{-1} est continue, l'ensemble $f^{-1}(K) \subseteq \mathcal{C}_1$ est également compact : ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall z \in f^{-1}(K), 1 + \varepsilon < |z| < R_1 - \varepsilon$ (note [3]).

2. En remplaçant g par $\bar g$ on obtient $\overline{\partial_z g} = \partial_{\bar z}\bar g$: on retrouve en quelque sorte l'égalité $\overline{z_1 z_2} = \bar z_1 \bar z_2$.
3. On peut justifier en disant que $d(f^{-1}(K), \partial\mathcal{C}_1) > 0$ car ce sont deux compacts disjoints.

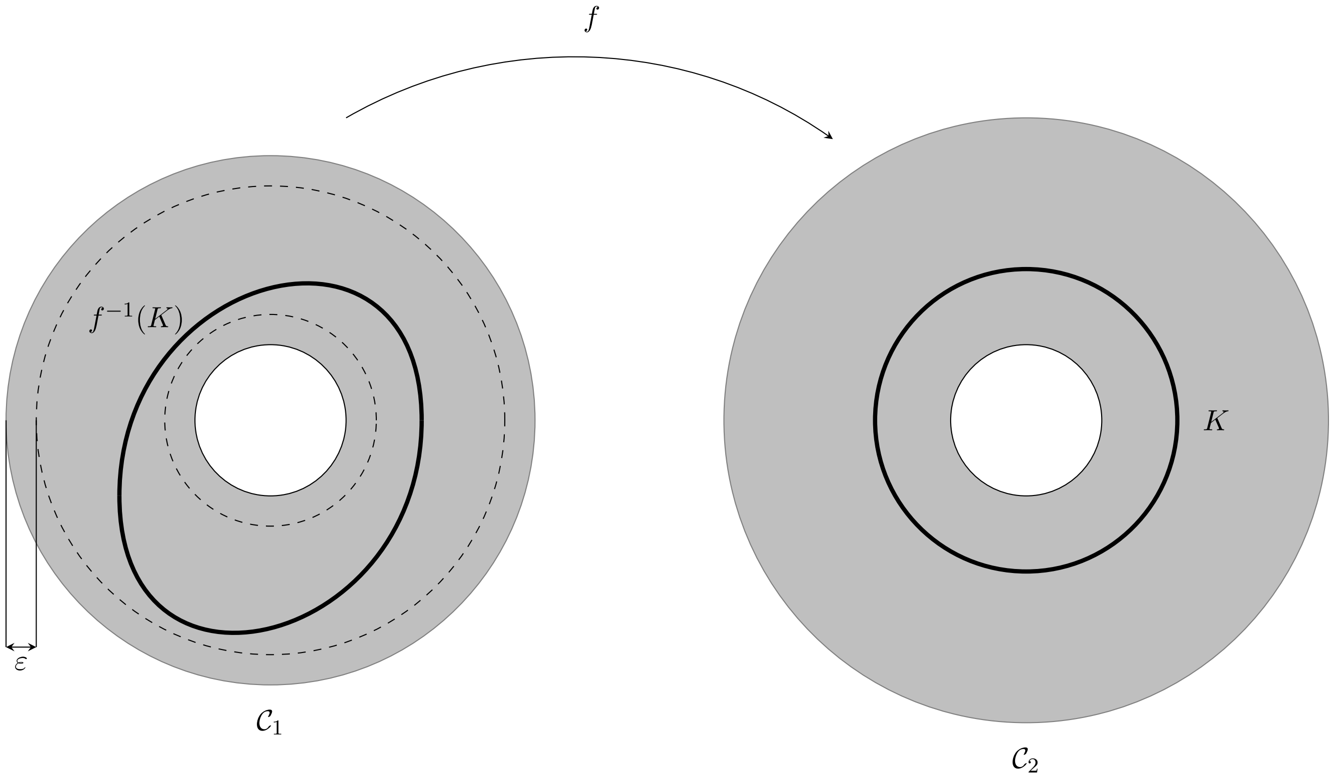

FIGURE – Il faut faire un dessin !

En particulier, $\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)$ est un connexe ne rencontrant pas $f^{-1}(K)$ donc $f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon))$ est un connexe (car f est continue) ne rencontrant pas K. Comme les composantes connexes de $\mathcal{C}_2 \setminus K$ sont $\mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$ et $\mathcal{C}(\sqrt{R_2}, R_2)$, on a :

$$f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)) \subseteq \begin{cases} \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2}) \\ \text{ou} \\ \mathcal{C}(\sqrt{R_2}, R_2) \end{cases}$$

Quitte à considérer $\frac{R_2}{f}$ au lieu de f, on peut supposer que l'on est dans le premier cas *i.e.* $f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)) \subseteq \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$. En reprenant les notations précédentes, comme $z_n \in \mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)$ à partir d'un certain rang on a $f(z_n) \in \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$ à partir d'un certain rang donc $\ell \in [1, \sqrt{R_2}]$. Comme $\ell \in \{1, R_2\}$ et que $R_2 > 1$ on a donc $\ell = 1$.

Finalement, on a prolongé u par continuité sur $\{|z| = 1\}$ par $\log|1| - \alpha \log|1| = 0$. Pour prolonger u par continuité sur $\{|z| = R_1\}$, on raisonne de la même façon ; il suffit juste de remarquer que $f(\mathcal{C}(R_1 - \varepsilon, R_1)) \subseteq \mathcal{C}(\sqrt{R_2}, R_2)$. En effet, si ce n'était pas le cas on aurait $f(\mathcal{C}(R_1 - \varepsilon, R_1)) \subseteq \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2})$ (l'alternative précédente reste valide pour $f(\mathcal{C}(R_1 - \varepsilon, R_1)))$ donc :

$$f(\mathcal{C}_1) = f(\mathcal{C}(1, 1+\varepsilon)) \cup f(\overline{\mathcal{C}(1+\varepsilon, R_1 - \varepsilon)}) \cup f(\mathcal{C}(R_1 - \varepsilon, R_1)) \subseteq \mathcal{C}(1, \sqrt{R_2}) \cup K'$$

avec $K' := f(\overline{\mathcal{C}(1+\varepsilon, R_1-\varepsilon)}) \subseteq \mathcal{C}_2$ compact (car f continue). Ainsi, $\eta := d(\{|z| = R_2\}, K') > 0$ donc $d(\{|z| = R_2\}, f(\mathcal{C}_1)) \geq \min(R_2 - \sqrt{R_2}, \eta) > 0$ ce qui est absurde puisque $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.

Ainsi, u se prolonge par continuité sur $\{|z| = R_1\}$ par $\log |R_2| - \alpha \log |R_1| = 0$ (par définition de α !). En conclusion, u se prolonge par continuité par 0 sur $\partial\mathcal{C}_1$.

4 Conclusion

D'après les deux sections précédentes, u est continue sur $\overline{\mathcal{C}_1}$ et harmonique sur $\mathcal{C}_1$ donc par le principe du maximum, u atteint ses extrema sur $\partial\mathcal{C}_1$. Or, on a vu que $u|_{\partial\mathcal{C}_1} \equiv 0$ donc $u \equiv 0$!

En particulier, $\partial_z u$ est également nulle, ce qui se traduit par :

$$\frac{f'}{f} = \frac{\alpha}{z} \tag{1}$$

(on a déjà fait le calcul). En intégrant sur $K = \mathcal{S}(0, \sqrt{R_2})$ (parcouru une fois, dans le sens direct, paramétré par $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$) on obtient :

$$\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t)}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

On se rend compte que l'on peut faire un changement de variable dans la première intégrale, pour obtenir (après avoir divisé par $2i\pi$) :

$$\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \alpha\, \mathrm{ind}_\gamma(0)$$

donc par choix de γ, comme $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 1$ on obtient $\alpha = \mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0)$, en particulier $\alpha \in \mathbb{Z}$; on a vu au tout début que $\alpha \geq 1$ donc on a même $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

On peut donc intégrer sans problème l'équation différentielle (1) pour obtenir $f(z) = Cz^\alpha$ (dériver $f(z)z^{-\alpha}$ par exemple). La fonction f étant non nulle on a $C \neq 0$, et comme f est injective on a nécessairement $\alpha = 1$ (sinon on a $\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ donc f n'est pas injective car elle est définie sur $\mathcal{C}_1$). Finalement, cela signifie que $\frac{\log R_2}{\log R_1} = 1$ donc que $R_2 = R_1$ et c'est ce que l'on voulait montrer !

Remarque. On a même montré que f s'écrit $f(z) = Cz$; de plus, d'après la section 3 on a $|C| \cdot 1 = 1$ donc $|C| = 1$ *i.e.* f est une rotation. Attention, les rotations ne sont pas les seuls biholomorphismes possibles entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, puisque l'on a éventuellement considéré $\frac{R_2}{f}$ dans la section 3. Ainsi, les biholomorphismes entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les rotations et les $\frac{R_2}{\text{rotations}}$ (de centre 0).

Références

[1] RUDIN Walter, *Analyse réelle et complexe* (troisième édition). Dunod, 2009.

[2] QUEFFÉLEC Hervé, *Topologie* (quatrième édition). Dunod, 2012.