Concours Centrale - Supélec 1998 PSI MATHÉMATIQUES I

- Corrigé par J. Blanchard (Lycée Fermat, Toulouse) -

- Partie I -

I.A. - On vérifie facilement pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$M(\theta+\pi) = M(\theta) + 2\pi\vec{j} \qquad \text{et} \qquad M(-\theta) = \mathrm{Sym}_{Ox}(M(\theta))$$

On en déduit que (C) est globalement invariante dans la translation de vecteur $2\pi\vec{j}$ et dans la symétrie orthogonale par rapport à Ox. [1]

I.B. - L'étude précédente montre qu'il suffit de construire le sous-arc (C_0) correspondant à $\theta \in [0\ \pi/2]$ puis de compléter successivement par la symétrie orthogonale par rapport à Ox et les translations de vecteur $2k\pi\vec{j}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Le tableau de variations correspondant :

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin 2\theta$	0		$+$		0
$\frac{dy}{d\theta} = 2(1-\cos 2\theta)$	0		$+$		4
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\nearrow$	π
$\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

met en évidence le point $O = M(0)$ comme seul point non régulier. En ce point le sous-arc (C_0) admet Ox pour tangente [2]; on a en effet :

$$\frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}(\theta) = 4\left(\cos(2\theta)\ \overrightarrow{i} + \sin(2\theta)\ \overrightarrow{j}\right) \quad \text{et en particulier :} \quad \frac{\overrightarrow{d^2M}}{d\theta^2}(0) = 4\ \overrightarrow{i}$$

[1] (C) est aussi globalement invariante dans les composées de ces deux transformations et de leurs inverses, à savoir les translations de vecteur $2k\pi\vec{j}$ et les symétries orthogonales par rapport aux droites $y = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$; ces invariances correspondent aux égalités :

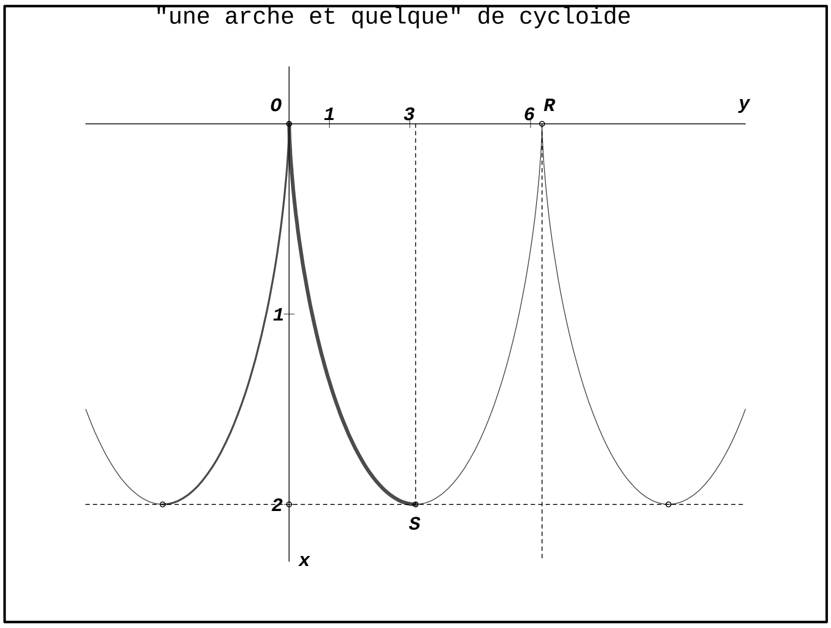
$$M(\theta+k\pi) = M(\theta) + 2k\pi\vec{j} \qquad \text{et} \qquad M(k\pi-\theta) = \mathrm{Sym}_{[y=k\pi]}(M(\theta))$$

La symétrie de (C) par rapport à Ox montre qu'il s'agit en fait d'un point de rebroussement de première espèce.[3]

Les autres points ($\theta \in]0\ \pi/2]$) sont en fait *biréguliers* et (C_0) parcouru "dans le sens des θ croissants" présente en ces points une concavité constamment tournée vers la gauche puisque :

$$\det_{(\vec{i},\vec{j})}\Big(\overrightarrow{\frac{dM}{d\theta}}(\theta),\ \overrightarrow{\frac{d^2M}{d\theta^2}}(\theta)\Big) = \begin{vmatrix} 4\sin\theta\cos\theta & 4\cos(2\theta) \\ 4\sin^2\theta & 4\sin(2\theta) \end{vmatrix} = 16\sin^2\theta > 0$$

ce que confirment les variations de la pente de la tangente.
Notons enfin la tangente parallèle à Oy en $S = M(\pi/2)$, en conformité avec l'invariance dans la symétrie par rapport à la droite $y = \pi$.



I.C. - On a calculé : $\overrightarrow{\frac{dM}{d\theta}} = 4\sin\theta\ \overrightarrow{\tau(\theta)}$ où $\overrightarrow{\tau(\theta)} = \cos(\theta)\ \vec{i} + \sin(\theta)\ \vec{j}$

[2] On peut établir "directement" que la droite $OM(\theta)$ admet Ox comme "position-limite" en constatant :

$$\frac{y(\theta)-y(0)}{x(\theta)-x(0)} \underset{\theta\to 0}{\sim} = \frac{(2\theta)^3/6}{(2\theta)^2/2} = \frac{2\theta}{3} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$$

On peut aussi utiliser la "pente-limite" de la tangente en $M(\theta)$:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$$

[3] Autre solution : le système $\Big(\overrightarrow{\frac{d^2M}{d\theta^2}}(0),\ \overrightarrow{\frac{d^3M}{d\theta^3}}(0)\Big)$ est *libre*.

est unitaire et de même sens que $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}$ pour $\theta \in \,]2k\pi\ (2k+1)\pi[$, de sens opposé pour $\theta \in \,](2k-1)\pi\ 2k\pi[$.
Cette fonction $\overrightarrow{\tau}$ répond donc à la question dès lors que l'on oriente les sous-arcs $(M(\theta))_{\theta\in]h\pi\ (h+1)\pi[}$ dans le sens des "θ croissants" si h est pair, des "θ décroissants" si $h$est impair.

I.D. - Pour la fonction $\overrightarrow{\tau}$ précédemment trouvée, la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \alpha\ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \theta \end{array}$$

répond à la question.
Sur chaque sous-arc birégulier, θ étant un angle polaire de la tangente orientée, on dispose de la formule : $R = \dfrac{ds}{d\theta}$ où s est une abscisse curviligne conforme à l'orientation choisie :

- sur $]2k\pi\ (2k+1)\pi[$, θ est un paramètre *direct* donc ;

$$\frac{ds}{d\theta} = +\left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} \right\| = +|4\sin\theta| = 4\sin\theta$$

- sur $](2k-1)\pi\ 2k\pi[$, θ est un paramètre *indirect* donc ;

$$\frac{ds}{d\theta} = -\left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} \right\| = -|4\sin\theta| = 4\sin\theta$$

Finalement, partout où il est défini et compte tenu des orientations choisies, le rayon de courbure ("algébrique") est donné par :

$$\boxed{R = 4\,\sin\theta}$$

I.E. -

I.E.1) Chaque g_λ est visiblement définie, continue et positive sur $[0\ 1[$.

- Pour $\lambda \in [0\ 1[$, la fonction g_λ est prolongeable par continuité en $s=1$ par la valeur $\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$; elle est donc intégrable sur $[0\ 1[$.
- Pour $\lambda = 1$ on a : $g_1(s) = \dfrac{\sqrt{s}}{\sqrt{1-s}} \overset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-s}}$ intégrable sur $[0\ 1[$ d'après la règle de Riemann.

On peut observer qu'en vertu de ce qui précède les fonctions f_λ introduites par l'énoncé sont bien définies (et continues) sur $[0\ 1]$.

I.E.2) Observons qu'à $s \in [0\ 1[$ *fixé*, on a, pour $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$:

$$\begin{cases} g_\lambda(s) < g_\mu(s) & \text{si } s > 0 \\ g_\lambda(s) = g_\mu(s)\ (= 0) & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

En effet, pour $s \in]0\ 1[$, $g_\lambda(s)$ apparaît comme le quotient des deux fonctions de λ :

- ⋆ $\lambda\sqrt{s}$ positive et strictement croissante,
- ⋆ $\sqrt{1-\lambda^2 s}$ strictement positive et strictement décroissante,

Considérons la fonction de deux variables :

$$\begin{array}{cccc} \tilde{g} : & [0\ 1] \times [0\ 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\lambda, s) & \longmapsto & \dfrac{\lambda\sqrt{s}}{\sqrt{1-\lambda^2 s}} \end{array}$$

- ⋆ Elle est *continue* en raison de la continuité des projections $(\lambda, s) \mapsto \lambda$ et $(\lambda, s) \mapsto s$ et des propriétés de permanence des fonctions continues (ici produit, différence, composition par $\sqrt{\ }$, quotient...)
- ⋆ Elle vérifie la propriété de *domination* suivante :

$$\forall\ \lambda \in [0\ 1] \quad \forall\ s \in [0\ 1[\qquad \tilde{g}(\lambda, s) = g_\lambda(s) \leq g_1(s)$$

  où g_1 est intégrable sur $[0\ 1[$ (cf I.E.1)

Un théorème du cours affirme alors que la fonction

$$\begin{array}{cccc} G : & [0\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & \displaystyle\int_{[0\ 1[} \tilde{g}(\lambda, s)\, ds \end{array}$$

est <u>continue</u>.
Utilisant encore l'inégalité précédente on peut écrire, pour $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$:

$$G(\mu) - G(\lambda) = \int_0^1 \underbrace{g_\mu - g_\lambda}_{\substack{\text{continue,} \\ \text{positive,} \\ \text{non nulle.}}} \quad > 0 \quad \text{par théorème.}$$

I.E.3) Effectuons le changement de variables : $s = \dfrac{\sin^2\alpha}{\lambda^2}$, $\alpha \in [0\ \theta]$ dans l'intégrale à calculer :

$$\begin{aligned} f_\lambda\left(\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}\right) &= \int_0^{\sin^2\theta/\lambda^2} \frac{\lambda\sqrt{s}}{\sqrt{1-\lambda^2 s}}\, ds \\ &= \int_0^\theta \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda^2}\, d\alpha \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\theta (1-\cos 2\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\lambda^2}(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta) \end{aligned}$$

La bijection : $\begin{array}{rccc} \chi_\lambda : & [0\ \omega] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \mapsto & \sin^2\theta/\lambda^2 \end{array}$ permet de paramétrer la courbe $(C_\lambda) = \Big\{ (x, f_\lambda(x)) \ / \ x \in [0\ 1] \Big\}$ par :

$$M_\lambda(\theta) \begin{cases} x_\lambda(\theta) = \dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2} = \dfrac{1}{2\lambda^2}(1 - \cos 2\theta) \\ y_\lambda(\theta) = f_\lambda(x_\lambda(\theta)) = \dfrac{1}{2\lambda^2}(2\theta - \sin 2\theta) \end{cases} \qquad \theta \in [0\ \omega]$$

ce qui prouve que (C_λ) est l'image par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2\lambda^2}$ du sous-arc de (C) défini par :

$$M(\theta) \begin{cases} x(\theta) = 1 - \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\theta - \sin 2\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0\ \omega]$$

I.E.4) Toujours pour $\lambda = \sin\omega \in]0\ 1[$ le résultat précédent fournit, pour $\theta = \omega$:

$$f_\lambda(1) = \frac{\omega - \sin\omega\ \cos\omega}{\sin^2\omega}$$

La continuité de $\lambda \mapsto f_\lambda(1)$ en 1 permet d'écrire :

$$f_{\mathbf{1}}(1) = \lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ <}} f_\lambda(1) = \lim_{\substack{\omega \to \pi/2 \\ <}} \frac{\omega - \sin\omega\ \cos\omega}{\sin^2\omega} \qquad \text{soit :} \qquad \boxed{f_{\mathbf{1}}(1) = \pi/2}$$

- *Partie II* -

II.A. - $z \in E$ est continue donc bornée sur le segment $[0\ 1]$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1 + z^2(x)}}{\sqrt{x}}$ est définie, continue, positive sur $[0\ 1]$ et majorée par $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+M^2}}{\sqrt{x}}$ (où $M = \sup\limits_{x \in [0\ 1]} |z(x)|$), elle-même intégrable sur $]0\ 1]$ d'après la règle de Riemann.

L'ensemble $\Big\{ U(z) \ / \ z \in E_a \Big\}$ est :

- $\star$ non vide : il contient $U(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{1+a^2}$ où a désigne la fonction constante a,
- $\star$ minoré : on a $U(z) \geq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$ pour tout $z \in E_a$.

Il admet donc une borne inférieure, soit $m(a)$, ce qui précède permettant en outre de préciser :

$$\boxed{2 \leq m(a) \leq 2\sqrt{1+a^2}}$$

II.B. - D'après l'encadrement précédent : $\boxed{\lim_{a\to 0} m(a) = 2}$

II.C. -

II.C.1) On a, pour $t \in \mathbb{R}$: $\phi(t) = \int_0^1 \psi(t,x)\,dx$ avec :

$$\psi(t,x) = \frac{\sqrt{1+[z(x)+t\,h_0(x)]^2}}{\sqrt{x}} \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times]0\ 1]$$

La fonction ψ est bien définie sur $\mathbb{R}\times]0\ 1]$ et continue, toujours en vertu de la continuité des projections $(t,x) \mapsto t$ et $(t,x) \mapsto x$ et des propriétés de permanence des fonctions continues (ici encore produit, somme, composition par $\sqrt{\ }$, quotient...).
Il en est de même pour

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) = \frac{[z(x)+t\,h_0(x)]\,h_0(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+[z(x)+t\,h_0(x)]^2}} \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times]0\ 1]$$

Enfin on dispose, pour tout segment $[-A\ \ +A]$ de $\mathbb{R}$, des majorations :

$$\left\{\begin{array}{l} |\psi(t,x)| \leq \dfrac{\sqrt{1+[\,|z(x)|+A\,|h_0(x)|\,]^2}}{\sqrt{x}} = \Psi_{A,0}(x) \\ \text{et} \\ \left|\dfrac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)\right| \leq \dfrac{[\,|z(x)|+A\,|h_0(x)|\,]\,|h_0(x)|}{\sqrt{x}} = \Psi_{A,1}(x) \end{array}\right. \qquad (t,x) \in [-A\ \ +A]\times]0\ 1]$$

avec, par un argument tout-à-fait similaire à celui de II.A, $\Psi_{A,0}$ et $\Psi_{A,1}$ intégrables sur $]0\ 1]$.
On peut alors affirmer par théorème :

$$\boxed{\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \phi'(t) = \int_0^1 \frac{[z(x)+t\,h_0(x)]\,h_0(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+[z(x)+t\,h_0(x)]^2}}\,dx \quad (t\in\mathbb{R})}$$

II.C.2) Le résultat précédent fournit pour $t=0$: $\boxed{\phi'(0) = \int_0^1 \dfrac{z(x)\,h_0(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx}$

Par hypotèse ϕ présente un minimum en $t=0$. On a donc : $\phi'(0) = 0$ soit :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{z(x)\,h_0(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx = 0}$$

ceci tenant pour tout élément h_0 de E_0. Soit maintenant $h \in E$. Il est clair que si $I = \int_0^1 h(x)\,dx$ alors $h - I \in E_0$. On a donc :

$$0 = \int_0^1 \frac{z(x)\,[h(x)-I]}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx = \int_0^1 \frac{z(x)\,h(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx - \Big(\int_0^1 \frac{z(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx\Big) I$$

soit :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{z(x)\,h(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx = \lambda \int_0^1 h(x)\,dx \qquad \text{avec :} \quad \lambda = \int_0^1 \frac{z(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx}$$ [4]

II.C.3) N a été choisi tel que pour tout $n > N$ on ait :

$$[x_0 - 1/n \;\; x_0 + 1/n] \;\subset\; [x_0 - 1/N \;\; x_0 + 1/N] \;\subset\; [0\;1]$$

Pour un tel n, l'intégrale proposée s'écrit alors :

$$\int_0^1 h_n(x) f(x)\,dx = \int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} n(1 - n|x - x_0|) f(x)\,dx$$

ou encore, par le changement de variable : $x = x_0 + u/n,\ u \in [-1\;1]$

$$\int_0^1 h_n(x) f(x)\,dx = \int_{-1}^1 \underbrace{(1 - |u|)\, f(x_0 + u/n)}_{= g_n(u)}\,du$$

Définissons : $g(u) = (1 - |u|)\, f(x_0)$ et vérifions les propriétés suivantes :

i) $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.S.} g$

ii) g est une fonction continue sur $[0\;1]$

iii) $\forall\, n > N \quad |g_n| \le M = \max\limits_{x\in[x_0-1/N\; x_0+1/N]} |f(x)|$ fonction intégrable sur $[-1\;1]$

qui résultent toutes de la continuité de f : en x_0 pour i), sur $[x_0 - 1/n\;\; x_0 + 1/n]$ pour ii), et enfin sur $[x_0 - 1/N\;\; x_0 + 1/N]$ pour iii).
Le "théorème de convergence dominée" du programme permet alors d'affirmer :

$$\int_0^1 g_n(u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 g(u)\,du \qquad \text{soit :} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x) f(x)\,dx = f(x_0)}$$ [5]

II.C.4) En appliquant II.C.2) avec $h = h_n$ pour tout $n > N$ on obtient, compte tenu de $\displaystyle\int_0^1 h_n(x)\,dx = 1$:

$$\forall\, n > N \qquad \lambda = \int_0^1 \frac{z(x)\,h_n(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}}\,dx$$

[4]On pouvait certes aussi utiliser la propriété rappelée en tout début d'énoncé...

[5]On peut aussi donner une preuve "directe" *avant* le changement de variable ; *après* ce changement, on peut encore donner une preuve directe, preuve qui revient alors à utiliser une propriété de convergence uniforme...

En appliquant alors II.C.3) à f_0 : $\begin{array}{rcl}]0\ 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+z^2(x)}} \end{array}$ on obtient :

$$\forall x_0 \in]0\ 1[\qquad \frac{z(x_0)}{\sqrt{x_0}\,\sqrt{1+z^2(x_0)}} = \lambda \quad \text{soit :} \quad \frac{z(x_0)}{\sqrt{1+z^2(x_0)}} = \lambda\,\sqrt{x_0}$$

et, par continuité : $\boxed{\forall\ x \in [0\ 1] \qquad \dfrac{z(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}} = \lambda\,\sqrt{x}}$

Encadrons la valeur λ comme demandé :

- La propriété $\lambda \leq 0$ conduirait à $z(x) \leq 0$ pour $x \in]0\ 1]$ et donc à $a = \displaystyle\int_0^1 z(x)\,dx \leq 0$ ce qui est faux. On a donc : $\lambda > 0$
- par ailleurs on a : $\lambda^2 = \dfrac{z^2(1)}{1+z^2(1)} < 1$

Finalement : $\boxed{\lambda \in]0\ 1[}$

Pour tout x de $[0\ 1]$, $z(x)$ vérifie l'équation : $z^2(x) = \lambda^2 x\,(1+z^2(x))$ soit : $(1-\lambda^2 x)z^2(x) = \lambda^2 x$ où $1-\lambda^2 x > 0$. Comme $z(x)$ est du signe de λ on en déduit : $\boxed{z(x) = +\dfrac{\lambda\,\sqrt{x}}{\sqrt{1-\lambda^2 x}}}$ ou encore : $\boxed{z = g_\lambda}$

II.C.5) Par définition : $a = U(z) = \displaystyle\int_0^1 g_\lambda(x)\,dx = f_\lambda(1)$. Or on sait que :

- $\lambda \mapsto f_\lambda(1)$ est strictement croissante sur $[0\ 1]$: c'est I.E.2)
- $f_0(1) = 0$: $g_0 = 0$
- $f_1(1) = \pi/2$: c'est I.E.4)

Il en résulte bien : $\boxed{0 < a < \pi/2}$

II.D. - On se donne réciproquement un réel $a \in]0\ \pi/2[$.

II.D.1) L'application $\lambda \mapsto f_\lambda(1)$ prend la valeur 0 en 0, la valeur $\pi/2$ en 1, et est continue (cf I.E.2) : le théorème des valeurs intermédiaires justifie alors l'existence de λ. L'unicité d'un tel λ résulte, elle, de la croissante stricte de cette application.

II.D.2) Puisque $U(g_\lambda + th_0) = \displaystyle\int_0^1 \psi(t,x)\,dx$ avec

$$\psi(t,x) = \frac{\sqrt{1+[g_\lambda(x)+t\,h_0(x)]^2}}{\sqrt{x}} \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times]0\ 1]$$

il suffit d'établir la convexité, pour chaque $x \in]0\ 1]$ fixé de la fonction $\psi(\cdot, x)$. En effet, pour t, $u \in \mathbb{R}$ et , $\alpha \in [0\ 1]$ l'inégalité

$$\phi((1-\alpha)t + \alpha u) \leq (1-\alpha)\phi(t) + \alpha\phi(u)$$

résultera de l'intégration entre 0 et 1 de l'inégalité entre fonctions de x :

$$\psi((1-\alpha)t + \alpha u, x) \leq (1-\alpha)\psi(t,x) + \alpha\psi(u,x) \qquad x \in]0\ 1]$$

Vérifions donc cette convexité en calculant, à x fixé :

$$\psi''_{t,t}(t,x) = \frac{h_1(x)^2}{\sqrt{(x)}} \, \frac{1}{(1 + [g_\lambda(x) + t\, h_0(x)]^2)^{3/2}} \geq 0$$

II.D.3) Le graphe d'une fonction convexe étant situé au dessus de chacune de ses tangentes, on peut écrire, en utilisant la tangente au point d'abscisse $t = 0$:

$$\phi(t) \geq \phi(0) + \phi'(0)t$$

Il suffit donc d'établir : $\phi'(0) = 0$ pour obtenir, en faisant $t = 1$, le résultat demandé. Or :

$$\phi'(0) \overset{\text{II.C.2)}}{=} \int_0^1 \frac{g_\lambda(x)\, h_0(x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+g_\lambda^2(x)}}\, dx = \cdots = \int_0^1 \lambda\, h_0(x)\, dx = 0$$

II.D.4)

- Le II.C. a montré que si $z \in E_a$ vérifie $U(z) = m(a)$ alors nécessairement $a \in]0\ \pi/2[$ et $z = g_\lambda$ où λ est lié à a par la relation $a = \displaystyle\int_0^1 g_\lambda(x)\, dx = f_\lambda(1)$ ce qui le détermine parfaitement comme cela est vérifié en II.D.1)
  Ceci prouve l'*unicité* de la solution.
- Réciproquement soit $a \in]0\ \pi/2[$ et λ choisi tel que $a = f_\lambda(1) = \displaystyle\int_0^1 g_\lambda(x)\, dx$.
  - on a bien $g_\lambda \in E_a$,
  - par ailleurs, si $h \in E_a$, alors $\displaystyle\int_0^1 (h - g_\lambda) = a - a = 0$ et donc : $U(h) = U(g_\lambda + \underbrace{(h - g_\lambda)}_{\in E_0}) \geq U(g_\lambda)$

  Ceci prouve que $U(z) = \min\limits_{h \in E_a} U(h)$ et donc l'*existence* de la solution.

Achevons les calculs demandés :

- On a, d'après I.E.3) : $\boxed{a = \dfrac{\omega - \sin\omega\cos\omega}{\sin^2\omega}}$

- Le changement de variables : $x = \dfrac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}$, $\alpha \in [0\ \omega]$ dans l'intégrale $U(g_\lambda) = \cdots = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-\lambda^2 x}}\,dx$ conduit, tous calculs faits, à :

$$\boxed{m(a) = \frac{2\,\omega}{\sin \omega}}$$

résultat dont on peut vérifier la cohérence avec l'encadrement obtenu en II.A.

- Partie III -

III.A. - Le point $M(t)$ décrivant (Γ) d'équation $y = f(x)$, ses coordonnées vérifient : $y(t) = f(x(t)$ et donc : $\dot{y}(t) = f'(x(t))\dot{x}(t)$ $(t \in [o\ T])$
La condition : $g\,x(t) = \dfrac{1}{2}\left[\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right]$ $(0 < t \leq T)$ s'écrit alors :

$$g\,x(t) = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2\left[1 + f'(x(t))^2\right]$$

soit, compte tenu de $\dot{x}(t) > 0$ et, donc, de $x(t) > 0$:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\,g}}\frac{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}}{\sqrt{x(t)}}\,\dot{x}(t)$$

Intégrons sur $]0\ T]$:

$$\int_0^T dt = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\,g}}\frac{\sqrt{1 + f'(x(t))^2}}{\sqrt{x(t)}}\,\dot{x}(t)\,dt$$

On reconnaît (changement de variable $x = x(t),\ dx = \dot{x}(t)\,dt$) l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\,g}}\frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{x}}\,dx$$

d'où finalement : $\boxed{T = \dfrac{1}{\sqrt{2\,g}}U(f')}$

III.B. - Les dérivées des fonctions f cherchées sont continues et vérifient : $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = a$ donc appartiennent à E_a. D'après II.D.4), si $0 < a < \pi/2$, la quantité $U(f')$ est alors minimum *ssi* $f' = g_\lambda$, où λ est défini en fonction de a comme en II.D.1, soit compte tenu de la condition initiale $f(0) = 0$ *ssi* : $f(x) = \displaystyle\int_0^x g_\lambda(s)\,ds$ c'est-à-dire pour : $\boxed{f = f_\lambda}$

La courbe correspondante est la courbe $\boxed{(C_\lambda)}$ du I.E.3)

Le temps T mis par le mobile pour parvenir en A est alors $\dfrac{1}{\sqrt{2g}} m(a)$ soit :

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{\omega}{\sin\omega}}$$

III.C. - Effectuons sur l'arc (C_λ) trouvé le changement de paramètre du I.E.3) :

$$x = \frac{1-\cos 2\theta}{2\lambda^2} = \frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}, \quad y = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{2\lambda^2} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\lambda^2}, \quad \text{avec } \theta \in [0\ \omega]$$

L'égalité : $\theta = \arcsin(\lambda\sqrt{x(t)})$ montre que θ est une fonction de t de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $]0\ T]$ avec $\dot\theta(t) > 0$.

La condition : $g\,x(t) = \dfrac{1}{2}\big[\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2\big]$ $(0 < t \leq T)$ s'écrit alors, en tenant compte des calculs du I.D. et de l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{2\lambda^2}$:

$$g\,\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2} = \frac{1}{2}\Big[\frac{ds}{dt}\Big]^2 = \frac{1}{2}\Big[\frac{ds}{d\theta}\Big]^2\dot\theta(t)^2 = \frac{1}{2}\Big[\frac{4\sin\theta}{2\lambda^2}\Big]^2\dot\theta(t)^2$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{\dot\theta(t) = \lambda\sqrt{\frac{g}{2}} \quad (0 < t \leq T)}$$

et, compte tenu de $\theta(0) = 0$:

$$\boxed{\theta(t) = \lambda\sqrt{\frac{g}{2}}\,t \quad (0 \leq t \leq T)}$$

Il reste à appliquer les formules de cinématique :

- $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{ds}{d\theta}\,\dot\theta = \dfrac{4\sin\theta}{2\lambda^2}\,\lambda\sqrt{\dfrac{g}{2}}$ soit : $\boxed{v = \dfrac{\sqrt{2g}}{\lambda}\,\sin\Big(\lambda\sqrt{\dfrac{g}{2}}\,t\Big)}$
- $\gamma_T = \dfrac{dv}{dt}$ soit : $\boxed{\gamma_T = g\,\cos\Big(\lambda\sqrt{\dfrac{g}{2}}\,t\Big)}$
- $\gamma_N = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{\dfrac{2g}{\lambda^2}\,\sin^2\Big(\lambda\sqrt{\dfrac{g}{2}}\,t\Big)}{\dfrac{4\sin\Big(\lambda\sqrt{\dfrac{g}{2}}\,t\Big)}{2\lambda^2}}$ soit : $\boxed{\gamma_N = g\,\sin\Big(\lambda\sqrt{\dfrac{g}{2}}\,t\Big)}$

• • • FIN • • •