On rappelle que si Φ et Ψ sont deux formes linéaires sur un espace vectoriel réel E telles que Ψ s'annule sur le noyau de Φ, alors il existe un réel λ tel que $\Psi = \lambda\Phi$.

Notations et objectifs du problème

- On note E l'espace $C([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.
- Pour a réel strictement positif, on note :

$$E_a = \left\{ f \in E,\ \int_0^1 f(x)dx = a \right\}.$$

- On considère, dans l'espace physique usuel, un plan vertical P orienté, muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes (Ox, Oy), de sorte que l'axe Ox soit dirigé par l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$: on écrit alors $\vec{g} = g\,\vec{i}$ avec $g > 0$. On note A le point de coordonnées $(1, a)$ où $a > 0$. À toute fonction f de classe C^1 sur $[0,1]$, telle que, $f(0) = 0$ et $f(1) = a$, on associe son graphe (Γ). Un point mobile $M(t)$, lâché du point O sans vitesse initiale et soumis à l'action de la pesanteur, est assujetti à se déplacer sur (Γ). Si T est le temps mis par ce mobile pour parvenir au point A, les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$ sont des fonctions de classe C^2 sur $[0, T]$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0 \\ x'(t) > 0 \\ gx(t) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2\right] \end{cases} \quad \text{pour } 0 < t \le T$$

On se propose d'étudier le problème du brachistochrone relatif à A : déterminer les courbes (Γ) telles que le temps T soit minimum.

Partie I - Étude d'une courbe paramétrée

On note (C) la courbe du plan P décrite, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par le point $M(\theta)$ de coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ avec :

$$\begin{cases} x(\theta) = 1 - \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\theta - \sin 2\theta \end{cases}.$$

I.A - Préciser des transformations géométriques simples laissant (C) globalement invariante.

I.B - Tracer (C) dans le système d'axes (Ox, Oy) représentés de sorte que l'axe Ox soit vertical et dirigé vers le bas. Calculer la longueur du sous arc de (C) délimité par deux points de rebroussement consécutifs.

I.C - Déterminer, moyennant une orientation convenable des sous arcs réguliers de (C), une fonction vectorielle

$$\theta \longmapsto \overrightarrow{\tau(\theta)} \text{ de classe } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R},$$

telle que, pour tout point $M(\theta)$ régulier de (C), le vecteur $\overrightarrow{\tau(\theta)}$ soit le premier vecteur du repère de Frénet relatif à ce point.

I.D - Déterminer de même, une fonction numérique

$$\theta \longmapsto \alpha(\theta), \text{ de classe } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R},$$

telle, que pour tout θ : $\alpha(\theta) = (\vec{i}, \overrightarrow{\tau(\theta)}) \bmod 2\pi$.

En déduire la valeur du rayon de courbure $R(\theta)$ en un point régulier de (C) relativement aux orientations choisies précédemment.

I.E - Pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on note g_{λ} la fonction numérique définie sur $[0, 1[$ par :

$$s \longmapsto \frac{\lambda\sqrt{s}}{\sqrt{1-\lambda^2 s}}.$$

I.E.1) Prouver que g_{λ} est intégrable sur $[0, 1[$. On posera, pour $x \in [0, 1]$:

$$f_{\lambda}(x) = \int_0^x g_{\lambda}(s)ds \text{ et on notera } (C_{\lambda}) \text{ le graphe de } f_{\lambda}.$$

I.E.2) Sans calculer l'intégrale, démontrer que la fonction : $\lambda \longmapsto f_{\lambda}(1)$ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$.

I.E.3) Dans cette question, on suppose que $0 < \lambda < 1$ et on pose $\lambda = \sin\omega$ avec $\omega \in]0, \pi/2[$. Pour $\theta \in [0, \omega]$ exprimer

$$f_{\lambda}\left(\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}\right)$$

en fonction de λ et θ. En conclure que (C_{λ}) est homothétique à un sous arc de (C). Calculer, en fonction de ω, la valeur de $f_{\lambda}(1)$.

I.E.4) Préciser la valeur de $f_1(1)$.

Partie II - Étude d'un problème de minimum

II.A - Si $z \in E$, montrer que la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}}$$

est intégrable sur $]0,1]$. On posera dans la suite :

$$U(z) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}}dx.$$

Justifier l'existence de :

$$m(a) = \inf_{z \in E_a} U(z) \text{ et donner un encadrement de } m(a).$$

II.B - Déterminer la limite de $m(a)$ quand a tend vers 0.

II.C - Dans cette question, on cherche une condition nécessaire sur le réel $a > 0$ pour qu'existe $z \in E_a$ vérifiant : $U(z) = m(a)$. On désigne par (a, z) un tel couple dont on suppose l'existence.

II.C.1) Soit $h_0 \in E_0$, démontrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(t) = U(z + th_0) \qquad (1)$$

est de classe C^1.

II.C.2) Exprimer $\phi'(0)$ sous forme d'une intégrale ; en déduire l'existence d'un réel λ, indépendant de h, tel que :

$$\forall h \in E, \int_0^1 \frac{z(x)h(x)}{\sqrt{1 + z^2(x)}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lambda \int_0^1 h(x)dx.$$

II.C.3) On fixe $x_0 \in]0, 1[$ et $N \in N^*$ tel que

$$\frac{1}{N} < \min(x_0, 1 - x_0).$$

Pour $n > N$, on note h_n l'élément de E défini par :

- $h_n(x) = 0$ pour $|x - x_0| \geq 1/n$.
- h_n est affine sur $[x_0 - 1/n, x_0]$ et sur $[x_0, x_0 + 1/n]$.
- $h_n(x_0) = n$.

Soit $f \in C(]0, 1[, \mathbb{R})$. La fonction $h_n f$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$. Démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 h_n(x) f(x) dx = f(x_0).$$

II.C.4) Prouver que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\frac{z(x)}{\sqrt{1 + z^2(x)}} = \lambda\sqrt{x}.$$

Montrer que $\lambda \in]0, 1[$ et donner l'expression de z sur $[0, 1]$.

II.C.5) Montrer que $0 < a < \pi/2$.

II.D - On se donne réciproquement un réel $a \in]0, \pi/2[$.

II.D.1) Démontrer l'existence d'un unique $\lambda \in]0, 1[$ tel que $a = f_\lambda(1)$.

II.D.2) Montrer que, si $h_0 \in E_0$, la fonction :

$$t \longmapsto U(g_\lambda + th_0).$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

II.D.3) Prouver que $U(g_\lambda + h_0) \geq U(g_\lambda)$.

II.D.4) Déduire de ce qui précède que si $a \in \left]0, \pi/2\right[$, il existe un unique $z \in E_a$ tel que $U(z) = m(a)$. Donner, en fonction de $\omega \in \left]0, \pi/2\right[$, tel que $\sin\omega = \lambda$, les valeurs de a et de $m(a)$.

Partie III - Étude du brachistochrone relatif à A

On considère maintenant le problème du brachistochrone défini dans le préambule dont on reprend les notations. Le réel λ est défini comme dans II.D.1.

III.A - f étant une fonction quelconque de classe C^1 sur $[0, 1]$, exprimer, à l'aide de $U(f')$, le temps mis par le point mobile $M(t)$ décrivant (Γ) pour parvenir au point A.

III.B - En déduire que, si $0 < a < \pi/2$, le problème du brachistochrone a une solution unique (Γ) que l'on précisera et calculer le temps T mis par le mobile, décrivant (Γ) pour parvenir en A.

III.C - Pour $t \in [0, T]$, calculer, en fonction de λ et t, la vitesse numérique v, l'accélération normale γ_N et l'accélération tangentielle γ_T du mobile au point $M(t)$ de (Γ) orientée dans le sens des t croissants $(v \geq 0)$ (on pourra s'aider d'un paramètre judicieux).

••• FIN •••
