$\boxed{\text{Automorphismes de } k(X)}$ Sexpigles

$$\Phi : \begin{cases} GL_2(k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k(X)) \\ M \longmapsto (X \mapsto F_{M^{-1}}(X)) \end{cases}$$

où $F_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}}(X) := \dfrac{aX+b}{cX+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, $F_M(F_N(X)) = F_M\left(\dfrac{aX+b}{cX+d}\right) = M\begin{pmatrix} \frac{aX+b}{cX+d} \\ 1 \end{pmatrix} = M\left(\dfrac{aX+b}{cX+d}\right) = MN\begin{pmatrix} X \\ 1\end{pmatrix}$
$= F_{MN}(X)$.

Donc $\Phi(M)\circ\Phi(N)(X) = \Phi(M)(F_{N^{-1}}(X)) = F_{N^{-1}}(\Phi(M) \ldots = F_{N^{-1}}(F_{M^{-1}}(X))$
$= F_{(MN)^{-1}}(X) = \Phi(MN)(X)$

donc $\boxed{\Phi \text{ est un morphisme}}$

Remarque ~~Φ est bien à va~~ Cela montre également que Φ est bien à valeurs dans $\mathrm{Aut}(k(X))$,
puisque $\Phi(M)\circ\Phi(M^{-1}) = \Phi(M^{-1})\circ\Phi(M) = \Phi(id) = id$.

$M \in \ker\Phi \Leftrightarrow \Phi(M) = id \Leftrightarrow F_{M^{-1}}(X) = X \Leftrightarrow \dfrac{aX+b}{cX+d} = X$ $\quad \left(M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow aX+b = cX^2 + dX$

$\Leftrightarrow M^{-1} \in k^* I_2$

$$\boxed{M \in \ker\Phi \Leftrightarrow M \in k^* I_2}$$

Donc on récupère $\Phi : GL_2(k)/k^*I_2 = \boxed{PGL_2(k) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_k(k(X))}$.

Reste à montrer que Φ est surjectif.

Soit $f \in \mathrm{Aut}_k(k(X))$, $A := f(X)$, $A = \dfrac{P}{Q}$ $\quad P \wedge Q = 1$, $P, Q \in k[X]$

Lemme $[k(X) : k(A)] = \max\{\deg Q, \deg P\}$.

Dém On remarque tout d'abord que comme $A \in k(X)$, $k(A) \subset k(X)$ et [illegible] $[k(X):k(A)] < \infty$. En effet,
X est annulé par $AQ(T) - P(T) \in k(A)[T]$ qui est un polynôme non nul (car $Q \neq 0$ et $A \neq 0$ car f inj).
donc X est algébrique sur $k(A)$, et $\underline{k(A)(X) = k(X)}$.

De plus, $\underbrace{[k(X):k]}_{=\infty} = \underbrace{[k(X):k(A)]}_{<\infty}[k(A):k]$ donc A est transcendant sur k.

ainsi, $k[A]$ est isomorphe à un anneau de polynômes.

Posons $\varphi := AQ(T) - P(T) \in k(A)[T]$. On a $\varphi \in k(T)[A]$, et ~~φ est pr~~ ~~$\varphi \in k[T][A]$ et φ est primitif~~

~~(car $Q \wedge P = 1$)~~, $\deg \varphi = 1$ donc φ est irréductible. Or, $\varphi \in k[T][A]$ et φ est primitif ($Q \wedge P = 1$) donc par le théorème de Gauss, $\boxed{\varphi \text{ est irréductible dans } k[T][A]}$.

Ainsi, φ est irréductible dans $k[A][T]$ donc dans $k(A)[T]$ (toujours le thm de Gauss).

Comme $\varphi(X) = 0$, on en déduit que $\varphi = \mu_{k(A),X}$ donc $[\underbrace{k(A)(X)}_{k(X)} : k(A)] = \deg_T \varphi = \max(\deg P, \deg Q)$.

Finalement, comme f est surjectif on a $k(A) = k(X)$ donc $\boxed{\deg P, \deg Q \leq 1}$ i.e. $f(X) = \frac{aX+b}{cX+d}$. $(c,d) \neq (0,0)$

~~Si maintenant $ad - bc = 0$, alors $f(X) = \frac{aX+b}{cX+d} = \frac{adX+bd}{cdX+d^2} = \frac{bcX+bd}{}$~~

~~quitte à considérer $f\left(\frac{1}{X}\right)$ on peut supposer $b \neq 0$ (car si $b, d = 0$ alors $f(X) \in k$ ce qui contredit f surj).~~

~~donc $f(X) = \frac{aX+b}{cX+d} = \frac{abX+b^2}{cbX+db} = \frac{abX+b^2}{adX+db} =$~~

Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin GL_2(k)$ alors, car $(c,d) \neq (0,0)$ on a $(a,b) = \lambda(c,d)$ $\lambda \in k$

donc $f(X) = \frac{aX+b}{cX+d} = \lambda$ absurde car $\boxed{f \text{ surjectif}}$ (ou inj en fait)

Donc $f = \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

13'49.