Action $SO(n) \curvearrowright S^{n-1}$

Faraut, Analyse sur les groupes de Lie

① L'action est transitive

Soit $x \in S^{n-1}$, $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$x = \sum_{i=1} x_i e_i = \underbrace{x'}_{\in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{n-1})} + x_n e_n . \qquad \|x\|^2 = \|x'\|^2 + x_n^2 = 1$$

donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\|x'\| = \sin\theta$, $x_n = \cos\theta$. ~~Soit Soit $x \in S^{n-1}$,~~

$$\iota : \left| \begin{array}{l} S^{n-2} \hookrightarrow S^{n-1} \\ x \longmapsto (x, 0) \end{array} \right. \qquad i : \left| \begin{array}{l} SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \\ u \mapsto \left(\begin{array}{c|c} u & \\ \hline & 1 \end{array}\right) \end{array} \right.$$

– Si $n = 2$,

$R_\theta x = y$ avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

donc $SO(2) \curvearrowright S^1$ est transitive

– Pour $n-1 \geq 2$, on suppose $SO(n-1) \curvearrowright S^{n-2}$ est transitive.

On a $x' \in \iota(SO(n-1))$ donc $\exists \tilde{x} \in SO(n-1)$, $\|x'\| \cdot \iota(\tilde{x}) = x'$

Par hypothèse de récurrence, $\exists v \in SO(n-1)$, $v(e_{n-1}) = \tilde{x}$.

$$\iota(v)(e_{n-1}) = \iota(\tilde{x}).$$

Soit $h_\theta := \left(\begin{array}{c|cc} I_{n-2} & & \\ \hline & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right) \in SO(n)$; $h_\theta e_n = (\sin\theta) e_{n-1} + (\cos\theta) e_n$.

Ainsi, $\underbrace{\iota(v) h_\theta}_{\in SO(n)} e_n = \underbrace{(\sin\theta)\, \iota(\tilde{x})}_{x'} + (\cos\theta) e_n = x$.

Donc $SO(n) \curvearrowright S^{n-1}$ est transitive.

Par récurrence, $\forall n \geq 2$, $SO(n) \curvearrowright S^{n-1}$ est transitive. (vrai aussi pour $n = 1$).

② $SO(n)/SO(n-1) \overset{\text{homéo}}{\simeq} S^{n-1}$

Lemme Si G est un groupe topologique compact, si G opère continûment sur (X, τ) alors $\forall x \in X$,

$$G/G_x \simeq Gx$$

ici, $G = SO(n)$ compact, $X = S^{n-1}$, $x := e_n$. $SO(n)_{e_n} = \iota(SO(n-1))$

$\boxed{SO(n) e_n = S^{n-1}}$ d'après ①.

Donc $\boxed{\forall n \geq 2, \; SO(n) / SO(n-1) \simeq S^{n-1}}$

③ SO(n) est connexe par arcs

Soit $u \in SO(n)$, $x := u(e_n)$. D'après ①, $\exists v \in SO(n-1)$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$,

$\iota(v) h_\theta e_n = x$. Ainsi, $\underbrace{u^{-1} \iota(v) h_\theta}_{\in SO(n)} e_n = e_n$ donc $u^{-1}\iota(v) h_\theta \in \iota(SO(n-1))$.

donc $\exists w \in SO(n-1)$, $u^{-1} \iota(v) h_\theta = \iota(w)$, $\boxed{\iota(v) h_\theta \iota(w^{-1}) = u}$.

Ainsi, l'application
$$\begin{array}{ccc} SO(n-1) \times \mathbb{R} \times SO(n-1) & \longrightarrow & SO(n) \\ (v, \theta, w) & \longmapsto & \iota(v) h_\theta \iota(w) \end{array}$$
est surjective et continue.

Par récurrence :

- $n = 2$: $SO(2) \simeq S^1$ par ② donc $SO(2)$ est c.p.a.
- Si $SO(n-1)$ est c.p.a., $SO(n)$ est l'image continue d'un c.p.a. donc $SO(n)$ est c.p.a.

Par récurrence, $\boxed{\forall n \geq 2 \; (\geq 1) \; SO(n) \text{ est c.p.a}}$.

Remarque. Par des arguments de réduction, on peut montrer que tout $u \in SO(n)$ s'écrit $\left(\text{Id}_{I_r} \; R_{\theta_1} \ldots R_{\theta_s} \right)$.

Remarque Si H, G/H sont connexes, alors G est connexe + ②.
(cf : $G \to G/H$)

13'46