Étude asymptotique d'une suite de polynômes

Leçons 220, 221, 224, 228
Salim Rostam

24 mai 2014

On définit la fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par $u(x) := e^{x^2/2}$.

Propriété. *Il existe une suite de polynômes* $(B_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ *telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u^{(n)}(x) = B_n(x)u(x) \tag{1}$$

Par exemple, les premiers termes de cette suite sont $B_0 = 1$, $B_1 = X$ et $B_2 = X^2 + 1$. Le but de ce développement est d'établir un équivalent de $B_n(x)$ pour tout $x > 0$. En particulier, on obtiendra pour $x = 1$ un équivalent du nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$.

1 Établissement d'une équation différentielle vérifiée par B_n

Une relation de récurrence. En dérivant $n+1$ fois la relation $u' = xu$ on obtient grâce à la formule de Leibniz $u^{(n+2)} = xu^{(n+1)} + (n+1)u^{(n)}$ donc d'après (1) on obtient :

$$B_{n+2} = XB_{n+1} + (n+1)B_n \tag{2}$$

En vue d'obtenir une équation différentielle vérifiée par B_n, on va essayer d'exprimer B_{n+2} et B_{n+1} en fonction de B_n et de ses dérivées.

Équation différentielle. En dérivant une fois la relation (1) on obtient $B_{n+1} = B_n' + B_nB_1$ c'est-à-dire :

$$B_{n+1} = B_n' + XB_n \tag{3}$$

On a donc réussi à exprimer B_{n+1} en fonction de B_n et de ses dérivées ; passons à B_{n+2}. Ainsi, on dérive maintenant deux fois (1), pour obtenir $B_{n+2} = B_n'' + 2B_n'B_1 + B_nB_2$ c'est-à-dire :

$$B_{n+2} = B_n'' + 2XB_n' + (X^2+1)B_n$$

En remplaçant les deux égalités que l'on a obtenues dans la relation (2) on obtient $B_n'' + 2XB_n' + (X^2+1)B_n = XB_n' + X^2B_n + (n+1)B_n$ donc après simplification :

$$B_n'' + XB_n' - nB_n = 0 \tag{4}$$

2 Introduction d'une fonction auxiliaire

On cherche à simplifier l'équation différentielle (4) obtenue précédemment. Plus précisément, on va chercher une fonction y telle que $T_n := B_n y$ soit reliée uniquement à sa dérivée seconde. Ainsi, on veut faire apparaître T_n dans $T_n'' = B_n'' y + 2B_n' y' + B_n y''$. En remplaçant B_n'' par ce que fournit l'équation (4) on obtient :

$$T_n'' = (2y' - xy)B_n' + (y'' + ny)B_n \tag{5}$$

Pour faire apparaître seulement $T_n (= B_n y)$, il faut *a priori* que le terme en B_n' soit nul : autrement dit, il suffit de choisir y tel que $2y' = xy$. Ainsi, en choisissant $y(x) := e^{x^2/4}$ on a bien $2y' = xy$ donc l'équation (5) précédente fournit, étant donné que $y'' = \frac{1}{2}(y + xy') = \frac{1}{2}(y + \frac{x^2}{2}y) = \frac{x^2+2}{4}y$:

$$T_n'' = \left(\frac{x^2+2}{4} + n\right) y B_n = \left(\frac{x^2+2}{4} + n\right) T_n$$

donc en particulier, pour $T > 0$:

$$\forall x \in [0, T], \left(\frac{1}{2} + n\right) T_n(x) \leq T_n''(x) \leq \left(\frac{T^2+2}{4} + n\right) T_n(x) \tag{6}$$

(on a bien $T_n(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$: on peut démontrer cela par récurrence à partir de la relation (2)).

3 Recherche de l'équivalent

On va d'abord énoncer un lemme qui va nous servir à exploiter l'inéquation différentielle que l'on vient de trouver.

Lemme. *Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'inéquation différentielle suivante ($\alpha, \beta \geq 0$) :*

$$\forall x \in [0, T], \alpha y(x) \leq y''(x) \leq \beta y(x)$$

Alors si $y(0) \neq 0$ et $y'(0) = 0$ on a :

$$\forall x \in [0, T], y(0) \cosh(\sqrt{\alpha} x) \leq y(x) \leq y(0) \cosh(\sqrt{\beta} x)$$

Démonstration. On compare y à $y_\alpha := x \mapsto \cosh(\sqrt{\alpha} x)$, solution de $y_\alpha'' = \alpha y_\alpha$ avec $y_\alpha(0) \neq 0$ et $y_\alpha'(0) = 0$, ainsi qu'à y_β (définie de façon analogue).

On va montrer que $z_\alpha := \frac{y}{y_\alpha} \geq y(0)$ sur $[0, T]$; montrons tout d'abord que z_α est croissante. On a $z_\alpha' = \frac{y' y_\alpha - y y_\alpha'}{y_\alpha^2}$: la dérivée du numérateur vaut $y'' y_\alpha + y' y_\alpha' - y' y_\alpha' - y y_\alpha'' = y'' y_\alpha - \alpha y y_\alpha$ donc comme $y_\alpha \geq 0$ et que $y'' \geq \alpha y$ on obtient que $(y' y_\alpha - y y_\alpha')' \geq 0$. Or, $(y' y_\alpha - y y_\alpha')(0) = 0$ (car $y'(0) = y_\alpha'(0) = 0$) donc par ce qui précède on a $(y' y_\alpha - y y_\alpha')|_{[0,T]} \geq 0$. Finalement, $z_\alpha'|_{[0,T]} \geq 0$ donc z_α est croissante sur $[0, T]$; comme $z_\alpha(0) = y(0)$ on a donc $z_\alpha = \frac{y}{y_\alpha} \geq y(0)$ sur $[0, T]$ qui est le résultat annoncé. On conclut car y_α est positive (on procède de la même manière pour prouver que $y \leq y(0) y_\beta$ sur $[0, T]$). $\square$

D'après (6), T_n vérifie l'inéquation du lemme ; cependant, on va considérer seulement T_{2n} car on peut montrer (toujours grâce à (2)) que B_{2n} est paire alors que B_{2n+1} est impaire (et cela se transmet bien aux T_n car $e^{x^2/4}$ est paire). Ainsi, $T'_{2n}(0) = 0$ et par le lemme on obtient, pour $T > 0$ et $x \in [0, T]$:

$$T_{2n}(0)\cosh\left(\sqrt{2n+\frac{1}{2}}x\right) \le T_{2n}(x) \le T_{2n}(0)\cosh\left(\sqrt{2n+\frac{T^2+2}{4}}x\right)$$

d'où $\forall x > 0, T_{2n}(x) \underset{n\to\infty}{\sim} T_{2n}(0)\frac{e^{\sqrt{2n}x}}{2}$ et donc :

$$\forall x > 0, B_{2n}(x) \underset{n\to\infty}{\sim} B_{2n}(0)\frac{e^{\sqrt{2n}x}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \tag{7}$$

Reste donc à déterminer $B_{2n}(0)$ et à montrer que cette quantité est non nulle (pour pouvoir appliquer le lemme) ; pour cela, on utilise (2) pour obtenir $B_{2n+2}(0) = (2n+1)B_{2n}(0)$ donc par récurrence $B_{2n}(0) = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 B_0$ donc (en multipliant en haut et en bas par les nombres pairs qui manquent) :

$$B_{2n}(0) = \frac{(2n)!}{(2n)(2n-2)\cdots 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

qui est bien non nul, et par la formule de Stirling on obtient $B_{2n}(0) \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{2^n n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}$ donc après simplification $B_{2n}(0) \sim \sqrt{2}(\frac{2n}{e})^n$ et donc en remplaçant dans (7) on obtient :

$$\forall x > 0, B_{2n}(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2n}{e}\right)^n e^{\sqrt{2n}x}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

En fait, on peut montrer en utilisant une variante du lemme précédent [1] que l'on a :

$$\forall x > 0, B_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\sqrt{n}x}e^{-\frac{x^2}{4}} \tag{8}$$

4 Nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$

D'après la relation (2), en substituant 1 à X on obtient :

$$B_{n+2}(1) = B_{n+1}(1) + (n+1)B_n(1)$$

donc comme $B_1(1) = 1$ et que $B_2(1) = 2$ on en déduit le théorème suivant.

Théorème. *Le nombre d'involutions de* $\mathfrak{S}_n$ *est équivalent quand* $n \to \infty$ *à* $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\sqrt{n}-\frac{1}{4}}$.

Démonstration. D'après l'équivalent précédent, il suffit de montrer que le nombre u_n d'involutions de $\mathfrak{S}_n$ est $B_n(1)$. (On rappelle que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une involution si $\sigma^2 = \mathrm{id}$ *i.e.* σ est d'ordre 1 ou 2.)

1. Voir annexe A.

– Tous les éléments de $\mathfrak{S}_1$ sont des involutions donc $u_1 = 1$.
– Tous les éléments de $\mathfrak{S}_2$ sont des involutions donc $u_2 = 2$.
– Soit $n \geq 1$. On remarque que $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+2}$ est une involution si et seulement si les cycles apparaissant dans la décomposition en produit de cycles disjoints de σ sont tous des transpositions. Ainsi, pour déterminer une involution de $\mathfrak{S}_{n+2}$ on peut :
  – décider que l'élément $n+2$ est fixé : il reste donc u_{n+1} choix ;
  – décider que l'élément $n+2$ est permuté avec $k \in \{1, \ldots, n+1\}$: il reste donc n éléments à permuter avec une involution *i.e.* u_n choix ;

  d'où $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$.

Finalement, les suites (u_n) et $(B_n(1))$ vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence donc elles sont égales, *i.e.* $u_n = B_n(1)$. □

Références

[1] GONNORD Stéphane et TOSEL Nicolas, *Calcul différentiel.* Ellipses, 1998 (page 148).

A Cas où n est impair

Comme T_{2n+1} est impair, on a $T_{2n+1}(0) = 0$ donc le lemme précédent est inutilisable. On démontre alors le lemme suivant.

Lemme. *Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'inéquation différentielle suivante ($\alpha, \beta > 0$) :*

$$\forall x \in [0, T], \alpha y(x) \leq y''(x) \leq \beta y(x)$$

Alors si $y(0) = 0$ et $y'(0) \neq 0$ on a :

$$\forall x \in [0, T], \frac{y'(0)}{\sqrt{\alpha}} \sinh(\sqrt{\alpha} x) \leq y(x) \leq \frac{y'(0)}{\sqrt{\beta}} \sinh(\sqrt{\beta} x)$$

Démonstration. On va adopter la même stratégie que dans le lemme précédent : on compare y à $y_\alpha := x \mapsto \sinh(\sqrt{\alpha} x)$, solution de $y_\alpha'' = \alpha y_\alpha$ avec $y_\alpha(0) = 0$ et $y_\alpha'(0) \neq 0$, et à y_β (définie de façon analogue).

On va montrer que $z_\alpha := \frac{y}{y_\alpha} \geq \frac{y'(0)}{\sqrt{\alpha}}$ sur $[0, T]$; montrons tout d'abord que z_α est croissante sur cet intervalle. On a $z_\alpha' = \frac{y' y_\alpha - y y_\alpha'}{y_\alpha^2}$: la dérivée du numérateur vaut $y'' y_\alpha + y' y_\alpha' - y' y_\alpha' - y y_\alpha'' = y'' y_\alpha - \alpha y y_\alpha$ donc comme $y_\alpha|_{[0,T]} \geq 0$ et que $y'' \geq \alpha y$ on obtient que $(y' y_\alpha - y y_\alpha')'|_{[0,T]} \geq 0$. Or, $(y' y_\alpha - y y_\alpha')(0) = 0$ (car $y(0) = y_\alpha(0) = 0$) donc par ce qui précède on a $(y' y_\alpha - y y_\alpha')|_{[0,T]} \geq 0$. Finalement, $z_\alpha'|_{[0,T]} \geq 0$ donc z_α est croissante sur $[0, T]$; reste à montrer que z_α se prolonge par continuité par $\frac{y'(0)}{\sqrt{\alpha}}$ en 0. En effet, pour $x \to 0$:

$$z_\alpha(x) = \frac{y(x)}{y_\alpha(x)} = \frac{x y'(0) + o(x)}{x y_\alpha'(0) + o(x)} = \frac{y'(0) + o(1)}{y_\alpha'(0) + o(1)} = \frac{y'(0)}{\sqrt{\alpha}}$$

(on a en fait redémontré un cas de la *règle de l'Hôpital*). Ainsi, par ce qui précède on a donc $z_\alpha = \frac{y}{y_\alpha} \geq \frac{y'(0)}{\sqrt{\alpha}}$ sur $[0, T]$ et on conclut car $y_\alpha|_{[0,T]}$ est positive (on procède de la même manière pour montrer que $y \leq \frac{y'(0)}{\beta} y_\beta$ sur $[0, T]$). □

On a par définition $T_{2n+1}(x) = B_{2n+1}(x)e^{x^2/4}$ donc $T'_{2n+1}(0) = B'_{2n+1}(0)$. Ainsi, d'après (3) on a $T'_{2n-1}(0) = T_{2n}(0)$, qui est non nul d'après ce qui a déjà été fait. Ainsi, on peut appliquer le lemme (on rappelle que l'équation différentielle (6) est valable quelque soit n), et on trouve, pour $T > 0$ et avec $\alpha := 2n - 1 + \frac{1}{2}$ et $\beta := 2n - 1 + \frac{T^2+2}{4}$:

$$\forall x \in [0, T], \frac{T_{2n}(0)}{\sqrt{\alpha}} \sinh(\sqrt{\alpha}x) \leq T_{2n-1}(x) \leq \frac{T_{2n}(0)}{\sqrt{\beta}} \sinh(\sqrt{\beta}x)$$

d'où $\forall x > 0, T_{2n-1}(x) \sim \frac{T_{2n}(0)}{\sqrt{2n-1}} \frac{e^{\sqrt{2n-1}x}}{2} \sim \frac{T_{2n}(0)}{\sqrt{2n}} \frac{e^{\sqrt{2n}x}}{2}$ donc :

$$\forall x > 0, B_{2n-1}(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{B_{2n}(0)}{\sqrt{2n}} \frac{e^{\sqrt{2n}x}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

et utilisant l'équivalent $B_{2n}(0) \sim \sqrt{2}(\frac{2n}{e})^n$ que l'on avait trouvé on obtient :

$$\forall x > 0, B_{2n-1}(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\frac{2n}{e})^n}{\sqrt{2n}} e^{\sqrt{2n}x} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Soit $x > 0$; montrons comment obtenir l'équivalent (8). Soit $N \in \mathbb{N}$.

- Si $N = 2n$, alors on a $B_N(x) = B_{2n}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2n}{e}\right)^n e^{\sqrt{2n}x} e^{-\frac{x^2}{4}}$; comme $n = \frac{N}{2}$ on obtient donc $B_N(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\sqrt{N}x} e^{-\frac{x^2}{4}}$.
- Si $N = 2n - 1$ alors on a $B_N(x) = B_{2n-1}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\frac{2n}{e})^n}{\sqrt{2n}} e^{\sqrt{2n}x} e^{-\frac{x^2}{4}}$; comme $n = \frac{N+1}{2}$ on obtient :

$$B_N(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{N+1}{e}\right)^{\frac{N+1}{2}}}{\sqrt{N+1}} e^{\sqrt{N+1}x} e^{-\frac{x^2}{4}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{N+1}{e}\right)^{\frac{N}{2}} \sqrt{\frac{N}{e}}}{\sqrt{N}} e^{\sqrt{N}x} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

  Or, comme $\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{\frac{N}{2}} \sim \sqrt{e}$ on en déduit que $\left(\frac{N+1}{e}\right)^{\frac{N}{2}} \sim \sqrt{e}\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{N}{2}}$ et on obtient donc encore une fois $B_N(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\sqrt{N}x} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Finalement, on a bien montré l'équivalent (8), c'est-à-dire :

$$\forall x > 0, B_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\sqrt{n}x} e^{-\frac{x^2}{4}}$$