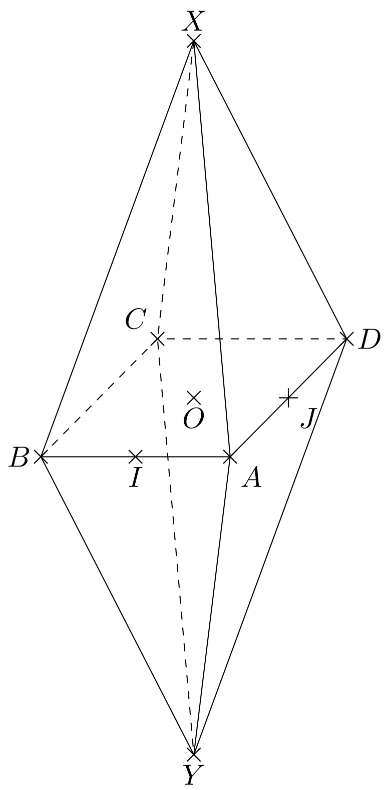
Coloriages du diamant

Salim Rostam



Notations.

— Si E et F sont deux points distincts, on note r_{EF} le quart de tour (dans le sens direct) d'axe (EF). On a alors deux autres rotations : un quart de tour dans l'autre sens r_{EF}^{-1} et un demi-tour r_{EF}^2.

— Si E, F et G sont trois points non alignés, on note s_{EFG} la symétrie orthogonale par rapport au plan (EFG).

1 Coloriages par isométries

Soit $\mathcal{D}$ le sous-groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui conserve globalement le diamant, c'est-à-dire, qui stabilise l'ensemble des sommets $\{A, B, C, D, X, Y\}$. Par le théorème de classification des isométries vectorielles, le sous-groupe $\mathcal{D}$ est engendré par des rotations par rapport à un axe qui passe par le centre de gravité O de $\mathcal{D}$ et des symétries orthogonales dont le plan de symétrie passe par O.

1. Remarquons que le groupe $\mathcal{D}$ stabilise O et conserve les distances. On répond à la question avec deux points de « type » différent pour s'assurer du résultat. Puisque $\mathcal{D}$ agit sur les

sommets du diamant, la relation orbite–stabilisateur donne $\#\mathcal{D} = \#(\mathcal{D}\cdot E)\#\mathcal{D}_E$ pour chaque sommet E.

Avec le sommet X La distance OX étant conservée, le sommet X ne peut aller qu'en X ou en Y donc $\mathcal{D}\cdot X = \{X, Y\}$. Les éléments du stabilisateurs fixent la droite (XY) et induisent donc une isométrie du plan (ABC). Les isométries vectorielles du plan étant les rotations et les symétries axiales, on en déduit que les éléments de $\mathcal{D}_X$ sont soit des rotations par rapport à (XY) soit des symétries par rapport à un plan qui contient cet axe. On a donc $\mathcal{D}_X = \{\mathrm{id}, r_{XY}^{\pm}, r_{XY}^2, s_{XAY}, s_{XBY}, s_{XIY}, s_{XJY}\}$. On trouve $\#\mathcal{D} = 2\times 8 = 16$.

Avec le sommet A De la même façon, on trouve $\#\mathcal{D} = 4\times 4 = 16$ puisque $\mathcal{D}\cdot A = \{A, B, C, D\}$ et $\mathcal{D}_A = \{\mathrm{id}, r_{AC}, s_{XAY}, s_{ABC}\}$.

2. La symétrie s_{ABC} envoie X sur Y. Ainsi, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_X \sqcup s_{ABC}\mathcal{D}_X$ et on peut lister les éléments de $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{id}, & r_{XY}, & r_{XY}^{-1}, & r_{XY}^2,\\
s_{XAY}, & s_{XBY}, & s_{XIY}, & s_{XJY},\\
s_{ABC}, & s_{ABC}r_{XY}, & s_{ABC}r_{XY}^{-1}, & s_{ABC}r_{XY}^2,\\
s_{ABC}s_{XAY} = r_{AC}^2, & s_{ABC}s_{XBY} = r_{BD}^2, & s_{ABC}s_{XIY} = r_{IO}^2, & s_{ABC}s_{XJY} = r_{JO}^2.
\end{array}$$

3. Pour chaque face on doit choisir entre les deux couleurs, le diamant à 8 faces donc il y a 2^8 coloriages possibles.

4. Le groupe $\mathcal{D}$ agissant sur les faces du diamant (c'est bien le cas, encore une fois car les distances sont conservées), on en déduit une action de $\mathcal{D}$ sur l'ensemble des coloriages. Deux coloriages sont dans la même orbite si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre en appliquant une isométrie (donc un élément de $\mathcal{D}$), on est donc intéressé par le *nombre d'orbites*.

5. Soit $g \in \mathcal{D}$. On vient de voir que l'isométrie g permute les faces du diamant. Décomposons g, vue comme permutation des faces du diamant, en produit de cycles à supports disjoints $g = c_1\cdots c_s$. Si $c_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,l_i})$, alors un coloriage est fixé par g si et seulement si pour chaque $i \in \{1, \dots, s\}$ les faces $\{f_{i,j} : j \in \{1, \dots, l_i\}\}$ ont la même couleur. On en déduit que pour qu'un coloriage soit fixé par g il faut et il suffit de choisir la couleur des $f_{i,1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, d'où $\#\mathrm{Fix}(g) = 2^s$. On reprend donc les éléments listés dans la question 2, et on numérote les faces du diamant de la sorte :

$$\begin{array}{cccc}
1 : ABX, & 2 : BCX, & 3 : CDX, & 4 : DAX,\\
1' : ABY, & 2' : BCY, & 3' : CDY, & 4' : DAY.
\end{array}$$

Pour connaître l'image d'une face, on regarde l'image de ses trois sommets.

g	décomposition en cycle vue comme permutation des faces	$\#\mathrm{Fix}(g)$
id	$(1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(1')\,(2')\,(3')\,(4')$	2^8
r_{XY}	$(1234)\,(1'2'3'4')$	2^2
r_{XY}^{-1}	$(4321)\,(4'3'2'1')$	2^2
r_{XY}^2	$(13)\,(24)\,(1'3')\,(2'4')$	2^4
s_{XAY}	$(14)\,(23)\,(1'4')\,(2'3')$	2^4
s_{XBY}	$(12)\,(34)\,(1'2')\,(3'4')$	2^4
s_{XIY}	$(1)\,(24)\,(3)\,(1')\,(2'4')\,(3')$	2^6
s_{XJY}	$(13)\,(2)\,(4)\,(1'3')\,(2')\,(4')$	2^6
s_{ABC}	$(11')\,(22')\,(33')\,(44')$	2^4
$s_{ABC}r_{XY}$	$(12'34')\,(1'23'4)$	2^2
$s_{ABC}r_{XY}^{-1}$	$(43'21')\,(4'32'1)$	2^2
$s_{ABC}r_{XY}^2$	$(13')\,(24')\,(1'3)\,(2'4)$	2^4
r_{AC}^2	$(14')\,(23')\,(1'4)\,(2'3)$	2^4
r_{BD}^2	$(12')\,(21')\,(34')\,(43')$	2^4
r_{IO}^2	$(11')\,(24')\,(33')\,(42')$	2^4
r_{JO}^2	$(13')\,(22')\,(31')\,(44')$	2^4

6. Pour calculer le nombre d'orbites, et donc le nombre de coloriages comme montré dans la question 4, on utilise le lemme de Burnside :

$$\begin{aligned}\text{nombre d'orbites} &= \frac{1}{\#\mathcal{D}}\sum_{g\in\mathcal{D}}\#\mathrm{Fix}(g)\\ &= \frac{1}{16}\left(2^8+2\cdot 2^6+9\cdot 2^4+4\cdot 2^2\right)\\ &= \frac{1}{2^4}\left(2^8+2^7+9\cdot 2^4+2^4\right)\\ &= 2^4+2^3+9+1\\ &= 34,\end{aligned}$$

donc il y a 34 coloriages du diamant à isométrie près.

2 Coloriages par isométries directes

On ne s'autorise ici à identifier deux coloriages que s'ils sont dans la même orbite de $\mathcal{D}_d \coloneqq \mathcal{D}\cap\{\text{isométrie directes de } \mathbb{R}^3\}$. On oublie donc les symétries orthogonales, ainsi que les symétries-rotations. Puisque $\mathcal{D}$ contient une isométrie indirecte, le sous-groupe $\mathcal{D}_d \subseteq \mathcal{D}$ est d'indice 2 (c'est le noyau du déterminant) donc de cardinal 8, et la liste des éléments de $\mathcal{D}_d$ est alors :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}, & r_{XY}, & r_{XY}^{-1}, & r_{XY}^{2}, \\ r_{AC}^2, & r_{BD}^2, & r_{IO}^2, & r_{JO}^2. \end{array}$$

On supprime alors les lignes en trop dans le tableau de la question 5, ce qui donne :

g	décomposition en cycle vue comme permutation des faces	$\#\mathrm{Fix}(g)$
id	$(1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(1')\,(2')\,(3')\,(4')$	2^8
r_{XY}	$(1234)\,(1'2'3'4')$	2^2
r_{XY}^{-1}	$(4321)\,(4'3'2'1')$	2^2
r_{XY}^2	$(13)\,(24)\,(1'3')\,(2'4')$	2^4
r_{AC}^2	$(14')\,(23')\,(1'4)\,(2'3)$	2^4
r_{BD}^2	$(12')\,(21')\,(34')\,(43')$	2^4
r_{IO}^2	$(11')\,(24')\,(33')\,(42')$	2^4
r_{JO}^2	$(13')\,(22')\,(31')\,(44')$	2^4

puis par le lemme de Burnside :

$$\begin{aligned} \text{nombre d'orbites} &= \frac{1}{\#\mathcal{D}_d} \sum_{g \in \mathcal{D}_d} \#\mathrm{Fix}(g) \\ &= \frac{1}{8}\left(2^8 + 5 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2\right) \\ &= \frac{1}{2^3}\left(2^8 + 5 \cdot 2^4 + 2^3\right) \\ &= 2^5 + 5 \cdot 2 + 1 \\ &= 43, \end{aligned}$$

donc il y a 43 coloriages du diamant à isométrie directe près.