Théorie des Groupes et Géométrie

Feuille n°4

Espaces projectifs, sous-espaces projectifs

Exercice 1 (Sous-espace projectif engendré par une partie)

Soit $(W_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de V.

1. Vérifier que $\mathbb{P}(\cap_i W_i) = \cap_i \mathbb{P}(W_i)$. En déduire la définition du sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ engendré par une partie. *Correction : Soit $x \neq 0$. On a $[x] \in \mathbb{P}(\cap_i W_i)$ ssi $x \in \cap_i W_i$ ssi $\forall i$ on a $x \in W_i$ ssi $\forall i$ on a $[x] \in \mathbb{P}(W_i)$ ssi $[x] \in \cap_i \mathbb{P}(W_i)$. La définition recherchée est « l'intersection des sous-espaces projectifs qui contiennent la partie ».*
2. Quel est le sous-espace projectif engendré par la réunion des $\mathbb{P}(W_i)$? *Correction : On va montrer que c'est $\mathbb{P}(\sum W_i)$. On a $\sum W_i \supseteq W_k$ pour tout k donc $\mathbb{P}(\sum W_i) \supseteq \mathbb{P}(W_k)$ donc $\mathbb{P}(\sum W_i) \supseteq \cup_i \mathbb{P}(W_k)$. Il suffit donc de montrer que si U est un sous-espace vectoriel de V tel que $\mathbb{P}(U) \supseteq \cup_i \mathbb{P}(W_i)$ alors $\mathbb{P}(U) \supseteq \mathbb{P}(\sum_i W_i)$. Pour cela, il suffit de montrer que $U \supseteq \sum_i W_i$, et donc il suffit de montrer que pour tout i on a $U \supseteq W_i$. Mais c'est clair car $\mathbb{P}(U) \supseteq \mathbb{P}(\cup_k W_k) \supseteq \mathbb{P}(W_i)$.*

Exercice 2 (Intersections de sous-espaces projectifs)

Démontrez les assertions suivantes concernant les sous-espaces projectifs d'un espace projectif fixé.

1. Par deux points distincts d'un espace projectif passe une unique droite projective. *Correction : C'est la même chose que de dire par deux vecteurs non colinéaires il passe un unique plan vectoriel.*
2. Deux droites projectives sont sécantes si et seulement si elles sont contenues dans un même plan projectif. Dans ce cas, leur intersection est un singleton si et seulement si elles sont distinctes. *Correction : C'est la même chose que de dire « deux plan vectoriels s'intersectent en au moins une droite si et seulement si ils sont contenus dans un même sous-espace de dimension 3 », et cette assertion découle de la formule de Grassmann $3 \geqslant \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim F \cap G = 4 - \dim F \cap G$. L'intersection est un singleton ssi $F \cap G$ est une droite ssi $\dim(F+G) = 3$ ssi $F + G \supsetneq F$ ssi $G \nsubseteq F$ ssi $F \neq G$.*
3. Par deux droites projectives sécantes et distinctes passe un unique plan projectif. *Correction : C'est l'équivalent de « par deux plan vectoriels distincts s'intersectant en une droite passe un unique sous-espace de dimension 3 ».*
4. Un hyperplan projectif et une droite projective sont toujours sécants. L'intersection est un singleton si et seulement si la droite n'est pas incluse dans l'hyperplan. *Correction : La première assertion est l'équivalent de « un hyperplan vectoriel et un plan vectoriel sont toujours sécants en au moins une droite ». C'est clair si $P \supseteq H$, et sinon $n = \dim(P+H) = \dim H + \dim P - \dim P \cap H = n - 1 + 2 - \dim P \cap H$ donc $\dim P \cap H = 1$. On a donc également la deuxième partie puisque $P \cap H$ est une droite ssi $P \nsupseteq H$.*

Exercice 3 (L'espace projectif des hyperplans)

Soit V un espace vectoriel de dimension finie.

1. Démontrez qu'une partie H de $\mathbb{P}(V)$ est un hyperplan projectif si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in V^*$ telle que $H = \{d \in \mathbb{P}(V);\ \varphi(d) = 0\}$. Une telle φ est appelée une *équation* de H. *Correction : On a $H = \mathbb{P}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un hyperplan vectoriel de V. Ainsi, il existe une forme linéaire non nulle f de V telle que $\mathcal{H} = \ker f$. Pour $x \neq 0$ on a soit $f([x]) = \{0\}$ soit $0 \notin f([x])$ donc l'ensemble des $d \in \mathbb{P}(V)$ tels que $f(d) = 0$ est bien défini.*
2. Démontrez que l'application qui à un hyperplan projectif H associe l'ensemble de ses équations induit une bijection de l'ensemble des hyperplans projectifs de V sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V^*)$.
(*Ainsi l'ensemble des hyperplans projectifs de V « est » lui-même un espace projectif.*) *Correction : Soit Φ*

cette application, de sorte que si H est un hyperplan projectif alors $\Phi(H)$ est l'ensemble des équations de H. Si ϕ est une équation de H alors si ψ en est une autre on sait que ϕ et ψ ont le même noyau donc ϕ et ψ sont proportionnelles donc sont sur la même droite de V^*. La réciproque est évidemment vraie donc $\Phi(H)$ est une droite de V^*, donc un élément de $\mathbb{P}(V^*)$.

- *L'application Φ est donc bien à valeurs dans $\mathbb{P}(V^*)$. Elle est injective puisque si $H \neq H'$ sont deux hyperplans et si ϕ, ϕ' sont des équations respectives alors $\ker \phi = H \neq H' = \ker \phi'$ donc ϕ et ϕ' ne sont pas proportionnelles donc ne sont pas sur la même droite de V^* donc $\Phi(H) \neq \Phi(H')$.*
- *L'application Φ est surjective car toute forme linéaire ϕ non nulle définit un hyperplan (d'équation ϕ).*

Exercice 4 (Incidences)

Soit P un plan projectif. Soient D une droite et m un point de P hors de D. Soit $m' \subset P'$ la droite duale, c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par m. On définit l'application d'incidence

$$i : m' \longrightarrow D$$

en associant, à toute droite passant par m, son point d'intersection avec D. Montrer que i est une homographie.
Correction : Pour rappel, si E^* est le dual (algébrique) du k-espace vectoriel E (tel que $\mathbb{P}(E) = P$) alors si $g = \mathbb{P}(G)$ est un sous-espace projectif de P alors $g' = \mathbb{P}(G^\perp)$, où $G^\perp = \{f \in E^* : f|_G = 0\}$. En particulier, d' est un point de la droite m' ssi d est une droite contenant m, ainsi m' correspond bien à l'ensemble des droites passant par m.

Puisque $m \notin D$, si $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{D}$) est le sev de E de dimension 1 (resp. 2) correspondant alors $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{D}$ donc $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{D} = E$. Ainsi, on peut trouver une base (e_1, e_2, e_3) de E telle que $\mathfrak{m} = \langle e_1 \rangle$ et $\mathfrak{D} = \langle e_2, e_3 \rangle$. On a $\mathfrak{m}^\perp = \langle e_2^*, e_3^* \rangle$.

Un élément non nul $\mathfrak{p} = ae_2^* + be_3^* \in \mathfrak{m}^\perp$ définit un plan $\mathfrak{p}^\circ = \{x \in E : (ae_2^* + be_3^*)(x) = 0\}$ de E qui contient $\mathfrak{m}$, qui correspond bien à une droite de P passant par m. L'élément $be_2 - ae_3 \in \mathfrak{D}$ est dans ce plan et on définit $f(ae_3^* + be_3^*) \coloneqq be_2 - ae_3$. On obtient bien un isomorphisme $f : \mathfrak{m}^\perp \to \mathfrak{D}$ linéaire, donc la projectivisée est l'application recherchée.

Groupes orthogonaux

Exercice 5 (Actions de SO sur la sphère et l'espace projectif)

1. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur la sphère euclidienne S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un vecteur $x \in S^n$; est-il connexe ? *Correction : On complète en une base directe et on dit que les isométries directes agissent simplement transitivement sur ces bases. Si M stabilise x alors $M^\top$ stabilise $x^\perp$ et donc $M = \mathrm{diag}(x, M')$ avec $M' \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Le stabilisateur est donc isomorphe à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ qui est connexe.*
2. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un point $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; est-il connexe ? *Correction : Il suffit de choisir un vecteur directeur unitaire et de faire comme avant. Si M stabilise $[x]$ alors $M(x) = \pm x$. On a encore que $M^\top$ stabilise $x^\perp$ donc M est de la forme $\mathrm{diag}(\pm 1, M')$ avec $M' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ avec $\det M' = \mp 1$. Donc cette fois le stabilisateur n'est plus connexe : après avoir fixé une base de $x^\perp$, on regarde l'application $M \mapsto \det M'$, qui se surjecte dans $\{\pm 1\}$.*

Exercice 6 (Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $(-,-)$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute paire de vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose $\langle x, y \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gx, gy)$.

1. Démontrez que $\langle -,- \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. *Correction : Immédiat.*
2. Démontrez que $\langle -,- \rangle$ est G-invariant, au sens où $\langle gx, gy \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $g \in G$. *Correction : On utilise le théorème de Cayley : pour $h \in G$, l'application $g \mapsto hg$ de G dans G est une bijection.*
3. Déduisez-en que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *Correction : Analyse : on veut montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $PgP^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $g \in G$. Ainsi, on a*

$$\left(P^{-\top} g^\top P^\top\right) PgP^{-1} = I_n,$$

donc

$$g^\top P^\top P g = P^\top P.$$

Synthèse : si M est la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, par la question précédente on a $g^\top M g = M$ pour tout $g \in G$. Si maintenant $P \in T_n^+(\mathbb{R})$ est obtenue via la décomposition $M = P^\top P$ de M, qui existe puisque $M \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$, on a $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et la relation précédente est vérifiée, d'où le résultat.

Remarque : si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, une variante de cette méthode, utilisant l'intégration pour la *mesure de Haar* de G au lieu de la sommation $\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}$ permet de montrer que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Décomposition de Choleski et décomposition QR)

Dans cet exercice on étudie deux décompositions matricielles classiques qui sont des conséquences du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On note $\mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et $T_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. (Décomposition de Choleski) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}TT$. *Correction : Soit $A \in \mathrm{SPD}_n(\mathbb{R})$. On veut trouver $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = T^\top T$. La transposée doit faire penser au produit scalaire, ainsi si on a un tel T on a*

$$\phi_A(x, y) \coloneqq \langle x, Ay \rangle = \langle x, T^\top T y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle.$$

Les coefficients de $A = (a_{ij})$ sont donnés par $a_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle$ si (e_i) est la base canonique. On reprend maintenant l'exercice. Puisque A est symétrique définie positive, la forme bilinéaire ϕ_A est un produit scalaire. Ainsi, si (e_i) est la base canonique on peut l'orthonormaliser pour le produit scalaire ϕ_A. On trouve alors une base (e'_i) orthonormale pour ϕ_A donnée par $e'_j = \sum_{i \leqslant j} \tilde{t}_{ij} e_i$ pour $\tilde{t}_{ii} > 0$. Par définition on a $\tilde{T} \coloneqq (\tilde{t}_{ij}) \in T_n^+(\mathbb{R})$ et $\tilde{T} = \mathrm{mat}_e e'$. On a également $T \coloneqq \tilde{T}^{-1} \in T_n^+(\mathbb{R})$ (car l'inverse est un polynôme en la matrice, par exemple par Cayley–Hamilton, et les coefficients diagonaux sont inversés) et $T = \mathrm{mat}_{e'} e$. On a alors :

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \langle e_i, Ae_j \rangle \\
&= \sum_{\substack{i' \leqslant i \\ j' \leqslant j}} t_{i'i} t_{j'j} \langle e'_{i'}, Ae'_{j'} \rangle \\
&= \sum_{\substack{i' \leqslant i \\ j' \leqslant j}} t_{i'i} t_{j'j} \phi_A(e'_{i'}, e'_{j'}) \\
&= \sum_{\substack{i' \leqslant i \\ j' \leqslant j}} t_{i'i} t_{j'j} \delta_{i'j'} \\
&= \sum_{k \leqslant \min(i,j)} t_{ki} t_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} t_{ik}^\top t_{kj} \\
&= (T^\top T)_{ij},
\end{aligned}$$

ainsi $A = T^\top T$. Autres méthodes :

- *on utilise l'unicité de la décomposition LU en écrivant $L = L'D$ avec D diagonale et on transpose ;*
- *par récurrence.*

Une fois qu'on sait que la décomposition existe, pour calculer T on peut simplement trouver ses coefficients en résolvant le système $A = T^\top T$, et il se trouve qu'on trouve des uniques solutions pour les coefficients. On peut aussi voir l'unicité de la façon suivante : si $T^\top T = U^\top U$ avec $T, U \in T_n^+(\mathbb{R})$, alors $U^{-\top} T = U T^{-1}$ est triangulaire supérieure et inférieure donc elle est diagonale (rappelons que l'inverse d'une matrice est un polynôme en cette matrice, cf. Cayley-Hamilton, donc l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure le reste). De plus, les coefficients diagonaux de $U^{-\top} T$ sont les $u_i^{-1} t_i$, ceux de UT^{-1} sont $u_i t_i^{-1}$, donc finalement $u_i^{-1} t_i = u_i t_i^{-1}$ donc $t_i^2 = u_i^2$ donc $t_i = u_i$ car les coefficients diagonaux sont positifs donc $UT^{-1} = I_n$.

2. (Décomposition QR) En utilisant la décomposition de Choleski, démontrez que pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = QR$. *Correction : Analyse : si $M = QR$ alors $M^\top M = R^\top Q^\top QR = R^\top R$. Synthèse : la matrice $M^\top M$ est symétrique définie positive (définie puisque M est inversible), ainsi elle possède une décomposition de Choleski $M^\top M = R^\top R$ avec $R \in T_n^+(\mathbb{R})$. La matrice $Q \coloneqq MR^{-1}$ vérifie*

$$Q^\top Q = R^{-\top} M^\top M R^{-1} = R^{-\top}(R^\top R)R^{-1} = I_n,$$

donc $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On peut aussi remarquer que $M = QR$ résulte du procédé de Gram–Schmidt, la matrice R étant la matrice de changement de base et Q la matrice d'une BON dans la base canonique (qui est aussi une BON) donc orthogonale. Pour l'unicité, l'unicité de R découle de l'analyse et de l'unicité dans Choleski, donc $Q = MR^{-1}$ également (R est bien inversible puisque dans $T_n^+(\mathbb{R})$).

Remarque : on peut montrer que les applications suivantes sont des homéomorphismes :

$$T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R}),\ T \mapsto {}^{\mathrm{t}}TT \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (Q,R) \mapsto QR.$$

3. (Inégalité de Hadamard) Démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n ||C_j||$ où $||C_j||$ désigne la norme euclidienne de la j-ième colonne de A. (*Indication : considérer la décomposition de Choleski de $B := {}^{\mathrm{t}}AA$ et en particulier les coefficients diagonaux de B.*) *Correction : L'inégalité est vérifiée si A n'est pas inversible. Si maintenant A est inversible, on a $A^\top A \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ donc on peut écrire $A^\top A = T^\top T$ avec $T \in T_n^+(\mathbb{R})$. On a alors $\det(A)^2 = \det(A^\top A) = \det(T^\top T) = \det(T)^2$. Par la question* **1**, *on a :*

$$\left(A^\top A\right)_{ii} = \sum_{k=1}^n t_{ki}^2 \geqslant t_{ii}^2,$$

de plus puisque T est triangulaire on a $\det T = \prod_{i=1}^n t_{ii}$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$ on a $A^\top A = (C_i^\top C_j)_{ij}$ donc l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned}|\det A|^2 &= |\det T|^2 \\ &= \prod_{i=1}^n t_{ii}^2 \\ &\leqslant \prod_{i=1}^n \left(A^\top A\right)_{ii} \\ &\leqslant \prod_{i=1}^n C_i^\top C_i \\ &\leqslant \prod_{i=1}^r \|C_i\|^2,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 8 (Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, voir M. Audin, *Géométrie*, EDP Sciences, 2006, Exercice V.54)

Soit G un sous-groupe d'ordre $n > 1$ de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Il agit sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble

$$\Gamma = \{(g,x) \in (G \setminus \{\mathrm{Id}\}) \times S;\ g(x) = x\}$$

avec ses deux projections sur S et $G \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Soit X son image dans S.

1. Caractériser géométriquement les éléments de X et vérifier que G stabilise X. On appelle $P_1, \dots, P_k$ les orbites de cette opération et e_i l'ordre du stabilisateur de x quand $x \in P_i$. Combien y a-t-il de rotations dans G qui ont le vecteur x de P_i comme point fixe ? En calculant le cardinal de Γ de deux façons différentes, montrer que

$$2(n-1) = n \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{e_i}\right).$$

Correction : On a $x \in X$ ss'il existe $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ tel que $gx = x$. Pour de tels éléments, pour tout $h \in G$ on a $hx \in S$ puisque G agit sur S, de plus $hgh^{-1} \in G$ et $(hgh^{-1})hx = hgx = hx$ donc $hx \in X$. Le nombre *de rotations recherché est exactement le cardinal du stabilisateur G_x de $x \in P_i$ dans G donc c'est e_i. En particulier, puisque $x \in X$ on sait que x est stabilisé par un élément non trivial de G donc $e_i \geqslant 2$. Par la relation orbite-stabilisateur :*

$$\begin{aligned}
\#\Gamma &= \sum_{x \in X} \sum_{\substack{g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\} \\ gx = x}} 1 \\
&= \sum_{x \in X} (\#G_x - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in P_i} (e_i - 1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (e_i - 1)\#P_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} (e_i - 1)\frac{n}{e_i} \\
&= n \sum_{i=1}^{k} (1 - e_i^{-1}).
\end{aligned}$$

De plus, chaque élément de $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$, étant une rotation autour d'un axe, possède exactement une droite de points fixes donc $\#\ker(g-1) \cap S = 2$. On trouve donc d'une part :

$$\begin{aligned}
\#\Gamma &= \sum_{g \neq 1} \sum_{\substack{x \in S \\ gx = x}} 1 \\
&= \sum_{g \neq 1} \#\mathrm{Fix}(g) \\
&= \sum_{g \neq 1} 2 \\
&= 2(n-1),
\end{aligned}$$

et on trouve bien l'égalité demandée.

2. En déduire que $k = 2$ ou 3. Montrer que, si $k = 2$, G est un groupe cyclique d'ordre n. *Correction : Montrons tout d'abord que $k \geqslant 2$. Si $k = 1$ alors $2(n-1) = n(1 - e_1^{-1})$ donc :*

$$2(1 - n^{-1}) = 1 - e_1^{-1} < 1.$$

Or $n \geqslant 2$ donc $n^{-1} \leqslant \frac{1}{2}$ donc $1 - n^{-1} \geqslant \frac{1}{2}$ donc $2(1 - n^{-1}) \geqslant 1$, contradiction.
Puisque $e_i \geqslant 2$ (cf. question 1), on a $1 - e_i^{-1} \geqslant \frac{1}{2}$ donc $n \sum_{i=1}^{k} (1 - e_i^{-1}) \geqslant \frac{nk}{2}$ donc :

$$2n > 2(n-1) \geqslant \frac{nk}{2}.$$

On trouve donc $4 > k$ donc $k \leqslant 3$ puisque k est entier.
Finalement, si $k = 2$ alors on obtient :

$$\begin{aligned}
2n - 2 &= n\left(1 - \frac{1}{e_1} + 1 - \frac{1}{e_2}\right) \\
&= 2n - n\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right),
\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{n}{e_1} + \frac{n}{e_2} = 2.$$

Par la relation orbite-stabilisateur, on sait que $\frac{n}{e_i} \in \mathbb{N}^*$ donc on trouve $\frac{n}{e_1} = \frac{n}{e_2} = 1$ i.e. $n = e_1 = e_2$. Les orbites (qui sont P_1 et P_2) sont donc de cardinal 1. Si $P_1 = \{x\}$ alors les éléments de G fixent les éléments de $\mathbb{R}x$ donc sont tous des rotations autour de cet axe. Ainsi, le groupe G s'identifie à un sous-groupe d'ordre n du groupe $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 (cf. rotations du plan). Ainsi, pour tout $z \in G$ on a $z^n = 1$ donc $G \subseteq \mathbb{U}_n$ donc $G = \mathbb{U}_n$ par égalité des cardinaux donc G est cyclique.

3. On suppose maintenant que $k = 3$. Montrer que, à l'ordre près des e_i, le uplet (n, e_1, e_2, e_3) est de la forme

$$(2p, 2, 2, p) \quad \text{ou} \quad (12, 2, 3, 3) \quad \text{ou} \quad (24, 2, 3, 4) \quad \text{ou} \quad (60, 2, 3, 5).$$

Correction : On suppose $e_1 \leqslant e_2 \leqslant e_3$. L'égalité de la question 1 donne donc :

$$2n - 2 = n(3 - e_1^{-1} - e_2^{-1} - e_3^{-1}),$$

donc :

$$\frac{n}{e_1} + \frac{n}{e_2} + \frac{n}{e_3} = n + 2. \tag{1}$$

Ainsi, il existe i tel que $e_i < 3$ donc $e_1 \leqslant 3$. On a vu en 1 que $e_i \geqslant 2$ donc on en déduit que :

$$e_1 = 2.$$

En remplaçant dans (1) on trouve donc :

$$\frac{n}{e_2} + \frac{n}{e_3} = \frac{n}{2} + 2. \tag{2}$$

De même, on obtient donc :

$$e_2 \leqslant 3,$$

donc puisque $e_2 \geqslant 2$ on a $e_2 \in \{2, 3\}$. Si $e_2 = 2$ alors (2) donne :

$$\frac{n}{e_3} = 2,$$

donc $n = 2e_3$, ce qui donne :

$$(n, e_1, e_2, e_3) = (2p, 2, 2, p),$$

où $p \coloneqq e_3$. On suppose donc maintenant $e_2 = 3$. L'équation (2) donne :

$$\frac{n}{e_3} = \frac{n}{6} + 2, \tag{3}$$

donc :

$$e_3 \leqslant 5.$$

Puisque $e_3 \geqslant e_2 = 3$, on a donc $e_3 \in \{3, 4, 5\}$.

- *Si $e_3 = 3$ alors (3) donne :*

  $$\frac{n}{3} = \frac{n}{6} + 2,$$

  donc $\frac{n}{6} = 2$ donc $n = 12$, d'où le quadruplet :

  $$(n, e_1, e_2, e_3) = (12, 2, 3, 3).$$

- *Si $e_3 = 4$ alors (3) donne :*

  $$\frac{n}{4} = \frac{n}{6} + 2,$$

  donc :

  $$\frac{3n - 2n}{12} = 2,$$

  donc $n = 24$, ce qui donne :

  $$(n, e_1, e_2, e_3) = (24, 2, 3, 4).$$

- *Si $e_3 = 5$ alors (3) donne :*

  $$\frac{n}{5} = \frac{n}{6} + 2,$$

  donc :

  $$\frac{6n - 5n}{30} = 2,$$

  donc $n = 60$, ce qui donne :

  $$(n, e_1, e_2, e_3) = (60, 2, 3, 5).$$

4. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (2p, 2, 2, p)$. Montrer que le stabilisateur des points de l'orbite P_3 est un groupe cyclique d'ordre p. En déduire que G est le groupe de tous les déplacements qui préservent un polygone plan régulier à p côtés et que c'est un groupe diédral $\mathbb{D}_p$ d'ordre $2p$. *Correction : L'orbite P_3 est de cardinal $\frac{n}{e_3} = 2$ donc, comme pour le cas $k = 2$, le stabilisateur G_3 d'un point de P_3 est un sous-groupe d'ordre p de $\mathbb{C}^*$ donc est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Les éléments du groupe G soit fixent les deux éléments x et $-x$ de P_3 (quand on est dans G_3 ; on aura donc des rotations autour de l'axe $\Delta := \mathbb{R}x$) soit les échangent (via un demi-tour, d'axe perpendiculaire à Δ). On en déduit donc que P_1 et P_2 sont incluses dans le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à Δ. Un générateur g de G_3 va bouger au moins un point de $P_1 \cup P_2$, et l'orbite va décrire un polygone régulier à p sommets (la rotation g étant d'ordre p). Les éléments de $G \setminus G_3$, qui sont des rotations d'angle π autour d'un axe contenu dans Δ, correspondent à des symétries axiales du polygone plan. Ainsi, le groupe G s'identifie à un sous-groupe de $\mathbb{D}_p$ et donc $G \simeq \mathbb{D}_p$ par égalité des cardinaux.*

5. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (12, 2, 3, 3)$. Combien l'orbite P_2 a-t-elle d'éléments ? Montrer que ces points forment un tétraèdre régulier. Conclure que G est le groupe des déplacements qui préservent un tétraèdre régulier. Que peut-on dire de l'orbite P_3 ? *Correction : L'orbite P_2 possède $\frac{n}{e_2} = 4$ éléments. Si $x \in P_2$ alors le stabilisateur G_2 de x est de cardinal $e_2 = 3$ donc $G_2 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. L'ensemble $P_2 \setminus \{x\}$ est de cardinal 3 donc les éléments de $G_2 \setminus \{x\}$, qui sont des rotations :*

- *stabilisent au plus un élément de $P_2 \setminus \{x\}$, donc bougent au moins deux points ;*
- *sont d'ordre 3 donc permutent circulairement les éléments de $P_2 \setminus \{x\}$.*

Si x_1, x_2, x_3 sont les éléments de $P_2 \setminus \{x\}$, on en déduit que $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_3) = d(x_3, x_1) =: r$ et $d(x, x_i)$ est constante pour tout i. En répétant ce processus pour par exemple x_1 à la place de x on trouve que $d(x, x_i) = r$ et donc le polyèdre défini par x, x_1, x_2, x_3 est bien un tétraèdre : par exemple x est sur la droite orthogonale au triangle $x_1x_2x_3$ passant par le centre de gravité, et on conclut par les distances.

ainsi G est inclus dans le groupe d'isométries directes du tétraèdre. Celui-ci est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ (car on peut permuter circulairement chaque triplet de sommets via une rotation dont l'axe passe par le quatrième sommet), donc par égalité des cardinaux on en déduit que G est isomorphe au groupe des déplacements du tétraèdre.

6. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (24, 2, 3, 4)$. Montrer de même que les points de P_2 forment un cube et que G est le groupe des déplacements qui préservent ce cube. Quelle est la figure formée par les points de l'orbite P_3 ? *Correction : Soit $x \in P_2$. Le stabilisateur G_2 de x est de cardinal $e_3 = 3$, il agit sur $P_2 \setminus \{x\}$ qui est de cardinal $\frac{24}{3} - 1 = 7$ donc nécessairement il y a deux orbites de tailles 3 et une orbite triviale $\{-x\}$. Ainsi, les éléments de G_x sont des rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $\mathbb{R}x$. En particulier, si $x_1 \in P_2 \setminus \{x\}$ est un point le plus proche de x alors si $\{x_1, x_2, x_3\}$ est l'orbite de x_1 sous G_2 alors $d(x_i, x_{i+1})$ et $d(x, x_i)$ sont constants. En répétant ce processus en changeant x on trouve que tous les côtés sont égaux donc les point de P_2 forment un cube. Les points de P_3 eux, au nombre de $\frac{24}{4} = 6$, correspondent à la projection sur la sphère du centre des faces.*

7. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (60, 2, 3, 5)$. Montrer que les points de l'orbite P_2 sont les sommets d'un dodécaèdre régulier (c'est nettement plus délicat ici) et que G est le groupe des déplacements qui préservent ce polyèdre. Que peut-on dire des points de l'orbite P_3 ?