Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°3 : Géométrie affine, géométrie projective

Exemples d'espaces affines

Exercice 1 (Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre)

Montrez que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = x$, où l'inconnue est une fonction dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$. Précisez sa direction E et sa dimension n. *Correction : Les solutions de l'équation homogène sont $x \mapsto \lambda y_h(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y_h(x) := e^{-x}$, et une solution particulière est $y_p(x) := x - 1$, ainsi l'ensemble des solutions est l'ensemble des $y_p + \mathbb{R}y_h$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace affine de direction $\operatorname{vect}(y_h)$ et de dimension 1.*

Exercice 2 (Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel)

Soient E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des supplémentaires de F dans E est muni d'une structure d'espace affine de direction $S = \mathscr{L}(E/F, F)$.

1. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique et $\mathscr{S}'$ l'ensemble des *sections* de π, c'est-à-dire les applications linéaires $s : E/F \to E$ telles que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$. Construisez une bijection $\mathscr{S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}'$:

   (a) Si $G \overset{i}{\hookrightarrow} E$ est un supplémentaire de F, montrez que $\pi_{|G}$ est un isomorphisme et $s := i \circ \pi_{|G}^{-1}$ une section de π ; *Correction : On a $\ker \pi_{|G} = G \cap \ker \pi = G \cap F = \{0\}$ puisque G et F sont supplémentaires, ainsi $\pi_{|G}$ est injective. De plus, on a $\dim G = \dim E - \dim F = \dim E/F$ donc $\pi_{|G}$ est un isomorphisme par égalité des dimensions. Finalement, pour $x \in E$, en écrivant $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ on a $\pi(x) = \pi(g) = \pi_{|G}(g)$ et :*

$$\begin{aligned} \pi \circ s(\pi(x)) &= \pi \circ s(\pi(g)) \\ &= \pi \circ \iota \circ \pi_{|G}^{-1}(\pi_{|G}(g)) \\ &= \pi \circ \iota(g) \\ &= \pi(g) \\ &= \pi(x), \end{aligned}$$

   donc $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$ comme demandé.

   (b) Si s est une section de π, montrez que $G = \operatorname{im}(s)$ est un supplémentaire de F. *Correction : Tout d'abord, puisque $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$ on sait que s est injective donc $\dim G = \dim E/F = \dim E - \dim F$. Pour montrer que G est un supplémentaire de F, par la formule de Grassmann il suffit donc de montrer que $F \cap G = \{0\}$. Si $y \in F \cap G$ alors on peut écrire $y = s(\pi(x))$ avec $x \in E$. Mais $y \in F$ donc $\pi(y) = 0$ donc $\pi \circ s \circ \pi(x) = 0$. Puisque $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$ on a donc $\pi(x) = 0$ donc $y = s(0) = 0$.*

   Correction : On vient de construire deux applications $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$. On va vérifier qu'elles sont inverses l'une de l'autre. Si G est un supplémentaire de F dans E, par bijectivité de $\pi_{|G}$ on a $\operatorname{im}(i \circ \pi_{|G}^{-1}) = \operatorname{im}(\iota G) = G$. Réciproquement, si s est une section alors pour tout $\alpha \in E/F$ on a $\pi_{|\operatorname{im} s}(s(\alpha)) = \pi \circ s(\alpha) = \alpha$ donc $\pi_{|\operatorname{im} s}^{-1}(\alpha) = s(\alpha)$ donc $i \circ \pi_{|\operatorname{im} s}^{-1} = s$ (on a $i \circ s(\alpha) = s(\alpha)$).

On est ramené à montrer que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine.

2. Montrez que le noyau de l'application $\Phi : \mathscr{L}(E/F, E) \to \mathscr{L}(E/F, E/F)$, $s \mapsto \pi \circ s$ est égal à $S = \mathscr{L}(E/F, F)$. *Correction : Remarquons que Φ est bien définie et est un morphisme de groupes (où les espaces sont des groupes pour la loi d'addition !). On a $s \in \ker \Phi$ ssi $\pi \circ s = 0_{\mathscr{L}(E/F,E)}$ ssi pour tout $\alpha \in E/F$ on a $\pi(s(\alpha)) = 0$ ssi $\operatorname{im} s \subseteq F$ ssi $s \in S$.*

3. Montrez que $\mathscr{S}' = \Phi^{-1}(\mathrm{Id})$ et déduisez-en que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine de direction S. *Correction : On a $s \in \mathscr{S}'$ ssi $s \in \mathscr{L}(E/F, E)$ et $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$ ssi $s \in \mathscr{L}(E/F, E)$ et $\Phi(s) = \mathrm{Id}_{E/F}$ ssi $s \in \Phi^{-1}\{\mathrm{Id}_{E/F}\}$. On conclut donc puisque $\mathscr{S}'$ est naturellement muni d'une action libre et transitive de $\ker \Phi = S$.*

Exercice 3 (Applications affines)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F.

1. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est un espace vectoriel de manière naturelle. *Correction : On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathrm{Appl}(\mathcal{E}, F)$ des applications de $\mathcal{E}$ vers F. Remarquons que dans F vu comme espace affine de direction F on a $\overrightarrow{uv} = v - u$ pour $u, v \in F$ (c'est bien l'unique vecteur de F dont l'action sur u donne v). On a bien $0 \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ (de partie linéaire $0 \in \mathscr{L}(E, F)$) puisque $\overrightarrow{00} = 0 = \overrightarrow{0}(\overrightarrow{uv})$. Si $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ de partie linéaire $\phi \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in k$ alors λf est bien dans $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ de partie linéaire $\lambda\phi \in \mathscr{L}(E, F)$, puisque $\overrightarrow{\lambda f(u) \lambda f(v)} = \lambda(f(v) - f(u)) = \lambda \overrightarrow{f(u)f(v)} = \lambda\phi(\overrightarrow{uv})$. Finalement, si $f, g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ de parties linéaires respectives $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\overrightarrow{(f+g)(u)(f+g)(v)} = (f+g)(v) - (f+g)(u) = [f(v) - f(u)] + [g(v) - g(u)] = \overrightarrow{f(u)f(v)} + \overrightarrow{g(u)g(v)} = \phi(\overrightarrow{uv}) + \psi(\overrightarrow{uv}) = (\phi + \psi)(\overrightarrow{uv})$.*
2. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un espace affine de direction $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$. *Correction : On montre d'abord que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ agit sur $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. C'est bien le cas cas si $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$, de parties linéaires respectives $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $f \dot{+} g$ est l'élément de $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ qui envoie $A \in \mathcal{E}$ sur $f(A) + g(A)$ et de partie linéaire $\phi + \psi$ (c'est bien une action : on est bien affine par définition, si on agit par 0 alors on ne bouge pas, et on est associatif). L'action est bien transitive car si $f_1, f_2 \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ de parties linéaires respectives $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{L}(E, F)$ alors on considère $g : \mathcal{E} \to F$ donnée par $g(A) \coloneqq f_2(A) - f_1(A) = \overrightarrow{f_1(A) f_2(A)}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$. On a bien $g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ puisque $\overrightarrow{g(A)g(B)} = g(B) - g(A) = [f_2(B) - f_1(B)] - [f_2(A) - f_1(A)] = [f_2(B) - f_2(A)] - [f_1(B) - f_1(A)] = \phi_2(\overrightarrow{AB}) - \phi_1(\overrightarrow{AB}) = (\phi_2 - \phi_1)(\overrightarrow{AB})$, donc g est de partie linéaire $\psi \coloneqq \phi_2 - \phi_1$. Par définition on a $f_2 = f_1 \dot{+} g$, et par définition de $\dot{+}$ l'application g est nécessairement celle construite ci-avant.*

Géométrie affine

Exercice 4 (Repères affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $n \coloneqq \dim \mathcal{E}$. On dit que $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ forment un *repère affine* de $\mathcal{E}$ si la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E.

1. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Montrer que $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ forment un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés. *Correction : A_0, A_1, A_2 forment un repère affine ssi $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$ est libre ssi A_0, A_1, A_2 sont deux à deux distincts et $\overrightarrow{A_0A_2} \neq \lambda \overrightarrow{A_0A_1}$ pour tout $\lambda \in k$ ssi A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés.*
2. Montrer que si une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ vérifie $f(A_i) = A_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ alors $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$. *Correction : Soit $A \in \mathcal{E}$. Par hypothèse on peut écrire $\overrightarrow{A_0A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$, donc*

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A}) \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)} \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \\ &= A_0 + \overrightarrow{A_0A} \\ &= A. \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Exercice 5 (Groupe des homothéties et translations)

Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$ forme un groupe.
(*Attention, il s'agit ici d'homothéties affines alors que l'exercice 11 de la feuille 2 utilisait des homothéties linéaires.*)
Correction : On montre d'abord le résultat suivant.

Lemme. *Soit f une application affine de partie linéaire $\lambda\mathrm{id}_E$ pour $\lambda \in k^\times$. Si $\lambda = 1$ alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$, sinon f est une homothétie de centre $f(A) + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Af(A)}$ (pour n'importe quel point A).*

Démonstration. Remarquons d'abord que la réciproque est vérifiée (et si $\lambda = 0$ alors f est constante). On suppose $\lambda = 1$. (Faire un dessin.) Par définition on a alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)B}$ donc $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)} =: u$. On a alors $f = t_u$ puisque $f(A) = A + \overrightarrow{Af(A)} = A + u$.

On suppose maintenant $\lambda \neq 1$. Montrons que f possède un point fixe Ω. On a :

$$\begin{aligned}
f(\Omega) = \Omega &\iff f(A) + \lambda\overrightarrow{A\Omega} = \Omega \\
&\iff \lambda\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{f(A)\Omega} \\
&\iff \lambda\overrightarrow{Af(A)} + \lambda\overrightarrow{f(A)\Omega} = \overrightarrow{f(A)\Omega} \\
&\iff \lambda\overrightarrow{Af(A)} = (1-\lambda)\overrightarrow{f(A)\Omega} \\
&\iff \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{f(A)\Omega} \\
&\iff \Omega = f(A) + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Af(A)}.
\end{aligned}$$

Pour un point A fixé, on va montrer que $f = h_{\Omega,\lambda}$ (et donc Ω sera nécessairement unique). En effet, on a :

$$\begin{aligned}
f(B) &= f(A) + \lambda\overrightarrow{AB} \\
&= f(A) + \lambda\overrightarrow{A\Omega} + \lambda\overrightarrow{\Omega B} \\
&= \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega B}.
\end{aligned}$$

□

On sait déjà que l'ensemble en question est stable par inversion, il reste donc à montrer qu'il est stable par produit.

- *L'ensemble des translations forme bien un groupe, puisque $t_u t_v(A) = t_v(A) + u = A + v + u = t_{u+v}(A)$.*
- *Soient $A, B \in \mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in k^\times$. L'application $f := h_{A,\lambda}h_{B,\mu}$ est affine de partie linéaire $\lambda\mathrm{id}_E\mu\mathrm{id}_E = \lambda\mu\mathrm{id}_E$. Ainsi, si $\lambda\mu = 1$ alors $h_{A,\lambda}h_{B,\mu}$ est une translation, et si $\lambda\mu \neq 1$ alors $h_{A,\lambda}h_{B,\mu}$ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$. On a :*

$$\begin{aligned}
f(B) &= h_{A,\lambda}h_{B,\mu}(B) \\
&= h_{A,\lambda}(B) \\
&= A + \lambda\overrightarrow{AB} \\
&= B + \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AB} \\
&= B + (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}, \qquad (\dagger)
\end{aligned}$$

  en particulier

$$\overrightarrow{Bf(B)} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}. \qquad (\ddagger)$$

  - *Si $\lambda\mu = 1$ alors par le lemme on a $f = t_u$ avec $u = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}$ par ($\ddagger$).*
  - *Si $\lambda\mu \neq 1$, on sait que $f = h_{\Omega,\lambda\mu}$ pour $\Omega = f(C) + \frac{1}{(\lambda\mu)^{-1}-1}\overrightarrow{Cf(C)}$ pour n'importe quel point C. Avec*

$C = B$ et (†), (‡) on trouve

$$\begin{aligned}\Omega &= f(B) + \frac{1}{(\lambda\mu)^{-1}-1}\overrightarrow{Bf(B)} \\ &= \left[B + (\lambda-1)\overrightarrow{AB}\right] + \frac{\lambda-1}{(\lambda\mu)^{-1}-1}\overrightarrow{AB} \\ &= B + (\lambda-1)\left(1+\frac{1}{(\lambda\mu)^{-1}-1}\right)\overrightarrow{AB} \\ &= B + (\lambda-1)\frac{(\lambda\mu)^{-1}}{(\lambda\mu)^{-1}-1}\overrightarrow{AB} \\ &= B + \frac{\lambda-1}{1-\lambda\mu}\overrightarrow{AB} \\ &= B + \frac{\lambda-1}{\lambda\mu-1}\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

- *La partie linéaire de $f := h_{A,\lambda}t_u$ est $\lambda\mathrm{id}_E$ donc par le lemme on a $h_{A,\lambda}t_u = h_{\Omega,\lambda}$ (on peut supposer $\lambda \neq 1$ sinon $h_{A,\lambda}$ est une translation et on a déjà traité ce cas) pour Ω donné par $\Omega = f(C) + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Cf(C)}$ pour n'importe quel point C. Avec $C = A$ on a*

$$\begin{aligned}f(A) &= h_{A,\lambda}t_u(A) \\ &= h_{A,\lambda}(A+u) \\ &= h_{A,\lambda}(A) + \lambda u \\ &= A + \lambda u,\end{aligned}$$

  donc

$$\begin{aligned}\Omega &= f(A) + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Af(A)} \\ &= A + \lambda u + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\lambda u \\ &= A + \lambda\left(1+\frac{1}{\lambda^{-1}-1}\right)u \\ &= A + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}u.\end{aligned}$$

- *Pour $t_u h_{A,\lambda}$, on a :*

$$\begin{aligned}(t_u h_{A,\lambda})^{-1} &= h_{A,\lambda}^{-1}t_u^{-1} \\ &= h_{A,\lambda^{-1}}t_{-u} \\ &= h_{\Omega',\lambda^{-1}},\end{aligned}$$

  avec $\Omega' = A - \frac{1}{\lambda-1}u$, donc

$$t_u h_{A,\lambda} = h_{\Omega',\lambda^{-1}}^{-1} = h_{\Omega',\lambda}.$$

Exercice 6 (Centre du groupe affine)

Dans cet exercice on étudie le centre du groupe affine d'un espace affine de dimension $n > 0$ sur un corps k. En choisissant un point de l'espace puis une base de sa direction, on se ramène immédiatement à l'étude du groupe affine $G := \mathrm{GA}(E)$ de l'espace vectoriel $E = k^n$. On note Z son centre.

1. Soit $f \in Z$ écrite sous la forme $f(x) = Ax + b$. Démontrez que A est une matrice d'homothétie puis que le rapport de cette homothétie est égal à 1. *Correction : (La correction de l'exercice est due à Matthieu Romagny.) Comme f est centrale, elle commute avec toute transformation affine $g \in G$, $g(x) = Cx + d$. Ceci signifie que $ACx + Ad + b = CAx + Cb + d$ pour tout $x \in E$. C'est équivalent à dire que $AC = CA$ et $Ad + b = Cb + d$, pour toute matrice inversible $C \in \mathrm{GL}(E)$ et tout vecteur $d \in E$. La première condition dit que A appartient au centre de $\mathrm{GL}(E)$, qui est composé des homothéties. Soit $\lambda \in k^\times$ le rapport de cette homothétie ; la deuxième condition dit que $(\lambda - 1)d = (C - I_n)b$ pour tout (C, d). En particulier, en prenant $C = I_n$ et $d = 1$ on trouve $\lambda = 1$. Finalement $A = I_n$.*

2. On suppose que $k \not\simeq \mathbb{F}_2$. Démontrez que $f = \mathrm{Id}$. *Correction : La deuxième condition s'écrit maintenant $(C - I_n)b = 0$ pour toute matrice $C \in \mathrm{GL}(E)$. Si $k \not\simeq \mathbb{F}_2$ il possède un élément inversible a distinct de 1. En prenant $C = aI_n$, la matrice $C - I_n$ est inversible et on obtient $b = 0$. Finalement $f = \mathrm{id}$ et $Z = \{1\}$.*
3. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $n > 1$. Montrez que le polynôme $P = X^n + X + 1$ est sans racine dans $\mathbb{F}_2$ et déduisez-en que $f = \mathrm{Id}$. (*Indication : on pourra utiliser une matrice de polynôme caractéristique P.*) *Correction : Le corps $\mathbb{F}_2$ possède 0 et 1 pour seuls éléments. Or $P(0) = P(1) = 1$ donc P n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2$. Notons C_P une matrice de polynôme caractéristique P (par exemple la matrice compagnon de P convient). Alors 0 n'est pas valeur propre de C_P donc $C_P \in \mathrm{GL}(E)$. De plus 1 n'est pas valeur propre de C_P donc $C_P - I_n \in \mathrm{GL}(E)$. La condition $(C - I_n)b = 0$ appliquée à $C = C_P$ fournit alors $b = 0$. Finalement $f = \mathrm{id}$ et $Z = \{1\}$.*
4. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $n = 1$. Déterminez Z. *Correction : Si $k = \mathbb{F}_2$ et $n = 1$, la partie linéaire de chaque transformation affine $f(x) = Ax + b$ est une matrice inversible de taille 1 à coefficients dans $\mathbb{F}_1$, donc $A = 1$. Le vecteur de translation b est un élément de $\mathbb{F}_2$. L'application $G \to (\mathbb{F}_2, +)$, $f \mapsto f(0)$ est donc un isomorphisme de groupes. On voit que dans ce cas G est commutatif donc $Z = G \simeq \mathbb{F}_2$.*

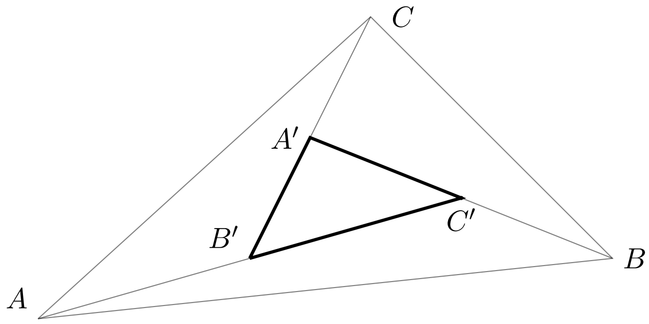
Exercice 7 (Un problème de construction)

On travaille dans un plan affine réel $\mathcal{E}$. La règle utilisée dans les différentes questions est *non graduée*. Les questions 4 et 5 peuvent être traitées en admettant le résultat des questions 1 à 3.

1. Soient D une droite et M un point. Décrivez avec les mots du lycée un procédé de construction à la règle et au compas de la droite parallèle à D passant par M. *Correction : (La correction de l'exercice est due à Matthieu Romagny.) On choisit un point N sur la droite D et on écarte le compas à la longueur $r = MN$. On trace un arc de centre N qui intersecte D en un point P. Ensuite on trace un arc de centre M et un arc de centre P qui se coupent en un point Q. Par construction le quadrilatère $MNPQ$ a ses côtes opposés de la même longueur, c'est donc un parallélogramme, de sorte que la droite (MQ) est la parallèle à D passant par M.*
2. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et $n \geqslant 2$ un entier. Démontrez avec les mots du master de Mathématiques qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet de points $(M_0, \dots, M_n)$ tels que $M_0 = A$, $M_n = B$ et $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. *Correction : Avec la relation de Chasles, les conditions sur les M_i sont équivalentes à dire que $\overrightarrow{AM_i} = \frac{i}{n}\overrightarrow{AB}$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Il s'ensuit que les points M_i vérifient nécessairement $M_i = A + \overrightarrow{AM_i} = A + \frac{i}{n}\overrightarrow{AB}$ et que ces points vérifient bien les conditions demandées.*
3. Un tel uplet est appelé *découpage de $\{A, B\}$ en n parties égales.* Décrivez un procédé de construction à la règle et au compas d'un tel découpage basé sur le théorème de Thalès. *Correction : On trace une droite D passant par A, distincte de (AB). Avec le compas réglé sur un écartement r aléatoire, on reporte sur la droite D des points $A = P_0, P_1, \dots, B' = P_n$ tels que P_{i+1} est à distance r de P_i. Alors $(P_0, \dots, P_n)$ est un découpage de $\{A, B'\}$ en n parties égales sur la droite D. Par le procédé de la question 1, pour chaque i on peut tracer la parallèle à la droite (BB') passant par P_i. Celle-ci coupe (AB) en un point M_i. D'après le théorème de Thalès $(M_0, \dots, M_n)$ est un découpage de $\{A, B\}$ en n parties égales.*

Lorsque $n = 2$, le découpage est de la forme (A, M_1, B) et on note $\mathrm{m}(A, B) := M_1$ le *milieu* de $\{A, B\}$. On se donne maintenant un triangle ABC. On souhaite construire trois points A', B', C' tels que $A' = \mathrm{m}(B', C)$, $B' = \mathrm{m}(C', A)$ et $C' = \mathrm{m}(A', B)$.

4. *Analyse.*
   (a) Dessinez un triangle $A'B'C'$ puis un triangle ABC de telle sorte que les conditions décrites ci-dessus soient remplies. *Correction :*

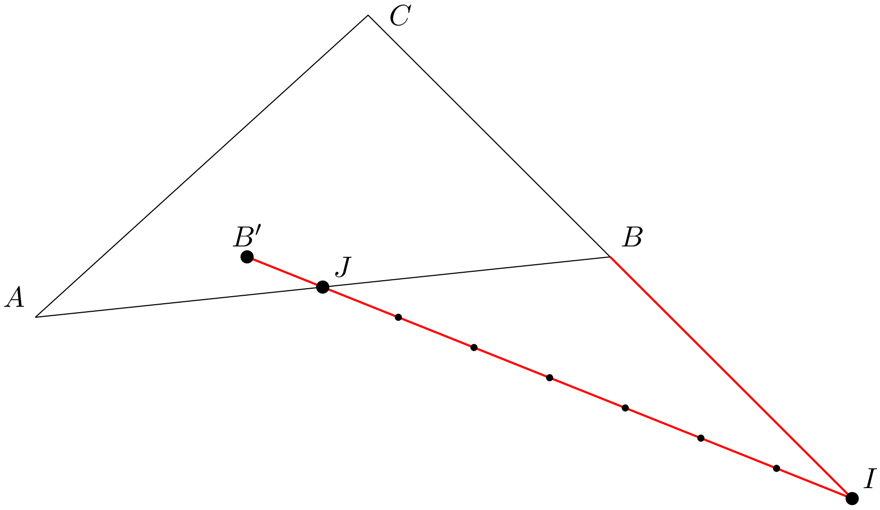


(b) On note $h(O,\lambda)$ l'homothétie de centre O et de rapport λ. Soit f la transformation affine $h(A,1/2)\circ h(B,1/2)\circ h(C,1/2)$. Montrez que l'un des points de la figure est fixe pour f. *Correction : On sait que $A'=\mathrm{m}(B',C)$, $B'=\mathrm{m}(C',A)$, $C'=\mathrm{m}(A',B)$. Ainsi, en appliquant les homothéties successives $h(C,1/2)$, $h(B,1/2)$ puis $h(A,1/2)$ au point B' on obtient $B'\mapsto A'\mapsto C'\mapsto B'$. Ceci montre que le point B' est fixe pour la composée f.*

(c) Quel est la linéarisée de f ? Quelle est l'application f ? *Correction : La linéarisée de f est la composée des trois linéarisées des homothéties qui la composent. C'est donc une homothétie vectorielle de rapport $(1/2)^3=1/8$. En conséquence, l'application f est égale à l'unique transformation affine ayant B' pour point fixe et de linéarisée l'homothétie de rapport $1/8$, c'est-à-dire l'homothétie affine $h(B',1/8)$.*

(d) Soit I le point défini par $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{CB}$. Indiquez quelle est l'image de I par f. *Correction : Notons J le milieu de $\{A,B\}$. Comme $B=\mathrm{m}(C,I)$, en appliquant au point I les homothéties successives qui composent f on obtient $I\xmapsto{h(C,1/2)}B\xmapsto{h(B,1/2)}B\xmapsto{h(A,1/2)}J$. Ainsi l'image de I par f est le milieu J de $\{A,B\}$.*

5. *Synthèse.* On revient au triangle ABC initial. Déduisez de l'analyse précédente un procédé de construction à la règle et au compas du triangle $A'B'C'$. *Correction : Du fait que $f=h(B',1/8)$ on déduit que $\overrightarrow{B'J}=\frac{1}{8}\overrightarrow{B'I}$ donc $\overrightarrow{JB'}=\frac{1}{7}\overrightarrow{IJ}$. En conséquence, partant de la seule donnée de ABC, à la règle et au compas on peut :*
   - *reporter le point I tel que $B=\mathrm{m}(C,I)$,*
   - *placer J le milieu de $\{A,B\}$,*
   - *effectuer un découpage $M_0=J,M_1,\dots,M_7=I$ de $\{I,J\}$ en sept parties égales,*
   - *reporter le point B' sur la droite (IJ), symétrique du point M_1 par rapport à J,*
   - *placer enfin $A'=\mathrm{m}(B',C)$ et $C'=\mathrm{m}(A',B)$.*



Exercice 8 (Sous-espaces parallèles)

1. Montrer que dans un espace affine $\mathcal{E}$, deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou égaux. *Correction : Soient $\mathcal{F}=A+F$ et $\mathcal{F}'=A'+F$ avec $A,A'\in\mathcal{E}$ et F,F' sous-ev de la direction E de $\mathcal{E}$. Si $\overrightarrow{AA'}\in F$ alors $A'=A+\overrightarrow{AA'}\in\mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$, et de même on a l'inclusion réciproque donc $\mathcal{F}=\mathcal{F}'$. Si maintenant $\overrightarrow{AA'}\notin F$ alors si $C\in\mathcal{F}\cap\mathcal{F}'$ alors $C=A+u=A'+u'$ avec $u,u'\in F$ donc $\overrightarrow{AA'}=u'-u\in F$ ce qui est absurde.*
2. Montrer que si $\dim\mathcal{E}=2$ alors deux droites affines disjointes sont parallèles. *Correction : Soient $\mathcal{D}=A+D$ et $\mathcal{D}'=B'+D'$. Si $D\neq D'$ (i.e. les droites ne sont pas parallèles) alors $D\oplus D'=E$ donc $\overrightarrow{AA'}=d+d'$ avec $d\in D$ et $d'\in D'$. Ainsi, on a $A'=A+d+d'$ donc $A'-d'=A+d\in\mathcal{D}'\cap\mathcal{D}\neq\emptyset$.*
3. Donner un exemple de deux droites de $\mathbb{R}^3$ disjointes et non parallèles. *Correction :* $\mathbb{R}(1,0,0)$ *et* $\mathbb{R}(0,1,0)+(0,0,1)$ *sont deux droites de* $\mathbb{R}^3$ *disjointes mais non parallèles.*

Exercice 9 (Images et images réciproques de sous-espaces)

1. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Montrer que l'image d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine. Montrer que l'image réciproque d'un sous-espace affine $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ est soit vide, soit un sous-espace affine. *Correction : Soit $\mathcal{F} = A + F$. On a*

$$\begin{aligned} M \in f(\mathcal{F}) &\iff \exists x \in F, M = f(A+x) \\ &\iff \exists x \in F, M = f(A) + \overrightarrow{f}(x) \\ &\iff \exists y \in \overrightarrow{f}(F), M = f(A) + y \\ &\iff M \in f(A) + \overrightarrow{f}(F), \end{aligned}$$

donc $f(\mathcal{F}) = f(A) + \overrightarrow{f}(F)$ est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$.
Soit maintenant $\mathcal{F}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ de direction F'. On suppose que $f^{-1}(\mathcal{F}') \neq \emptyset$. Soit $B \in f^{-1}(\mathcal{F}')$ et montrons que $f^{-1}(\mathcal{F}') = B + \overrightarrow{f}^{-1}(F')$. On a $\mathcal{F}' = f(B) + F$ et donc

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(\mathcal{F}') &\iff f(M) \in \mathcal{F}' \\ &\iff f(M) = f(B) + F' \\ &\iff \overrightarrow{f(B)f(M)} \in F' \\ &\iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{BM}) \in F' \\ &\iff \overrightarrow{BM} \in \overrightarrow{f}^{-1}(F') \\ &\iff M \in B + \overrightarrow{f}^{-1}(F'), \end{aligned}$$

comme annoncé.

2. Montrer qu'une application affine envoie 3 points alignés sur 3 points alignés. *Correction : Par la question* 1, *l'image d'une droite affine est soit un point soit une droite affine, ce qui prouve le résultat (en particulier, l'image de trois points alignés peut être réduite à un point).*

Espace projectif

Exercice 10 (Points et droites de l'espace projectif)

1. Déterminer le nombre de points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$. *Correction : On donne deux rédactions.*
   - *Un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{F}_q^{n+1}$. Deux points $x, y \in \mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\}$ sont sur la même droite ssi $y = \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$, donc une droite possède exactement $\#\mathbb{F}_q^\times = q-1$ points. Puisque $\#\mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\} = q^{n+1} - 1 = (q-1)\sum_{i=0}^n q^i$, on en déduit que $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \sum_{i=0}^n q^i$.*
   - *Cette rédaction se généralise à la question précédente (et même plus généralement). Le groupe $\mathrm{GL}_{n+1}(q)$ agit transitivement sur les droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^{n+1}$. Si D est une telle droite, par la relation orbite-stabilisateur on a $\#\mathrm{GL}_{n+1}(q) = \#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D \#(\mathrm{GL}_{n+1}(q) \cdot D) = \#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D \#\{$droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^{n+1}\} = \#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D \#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$. Il reste donc à calculer le cardinal du stablisateur $\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D$. On voit facilement que, dans une base adaptée fixée, un élément du stablisateur est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & *' \\ 0 & M \end{smallmatrix}\right)$ où $* \in \mathbb{F}_q^\times$, $*' \in \mathrm{M}_{n,1}(q)$ et $M \in \mathrm{GL}_n(q)$, ainsi $\#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D = q^n(q-1)\#\mathrm{GL}_n(q)$. On en déduit que*

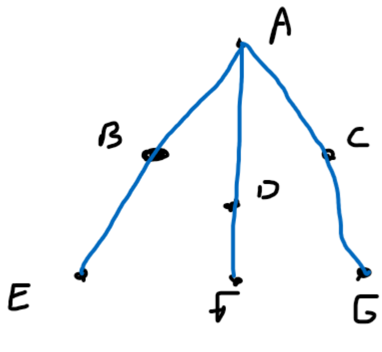
$$\begin{aligned} \#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) &= \frac{\#\mathrm{GL}_{n+1}(q)}{q^n(q-1)\#\mathrm{GL}_n(q)} \\ &= q^{n(n+1)/2 - n(n-1)/2 - n} \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)\dots(q-1)}{(q-1)(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q-1)} \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \\ &= q^n + \dots + q + 1. \end{aligned}$$

2. On suppose $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ (on pourra utiliser une action transitive bien choisie). *Correction : Les droites de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ *correspondent aux plans vectoriels de* $\mathbb{F}_q^{n+1}$*. Le groupe* $\mathrm{GL}_{n+1}(q)$ *agit transitivement sur ces plans, donc comme avant le nombre* N *de droites de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ *est donné par* $\mathrm{GL}_{n+1}(q)/\mathrm{GL}_{n+1}(q)_P$ *où* $\mathrm{GL}_{n+1}(q)_P$ *est le stabilisateur d'un plan vectoriel* P *(quelconque). Dans une base adaptée fixée, un élément de ce stablisateur est de la forme* $\left(\begin{smallmatrix} M & M' \\ 0 & M'' \end{smallmatrix}\right)$ *avec* $M \in \mathrm{GL}_2(q), M'' \in \mathrm{GL}_{n-1}(q)$ *et* $M' \in \mathrm{M}_{2,n-1}(q)$*. On en déduit que*

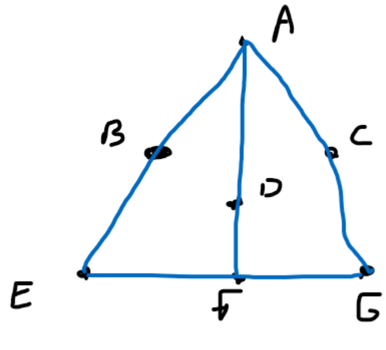
$$\begin{aligned} N &= \frac{\#\mathrm{GL}_{n+1}(q)}{\#\mathrm{GL}_2(q)\#\mathrm{GL}_{n-1}(q)\#\mathrm{M}_{2,n-1}(q)} \\ &= q^{\left[n(n+1)-(n-1)(n-2)\right]/2-3-2(n-1)} \frac{(q^{n+1}-1)\dots(q-1)}{(q^2-1)(q-1)\times(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)} \\ &= q^{\left[n^2+n-(n^2-3n+2)\right]/2-1-2n} \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)} \\ &= \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)}. \end{aligned}$$

3. Représenter les éléments de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ et tracer les droites. On parle du *plan de Fano*. *Correction : Pour* $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ *on trouve* $\frac{(2^3-1)(2^2-1)}{(2^2-1)(2-1)} = 2^3-1 = 7$ *droites. On sait que :*
   - *Deux droites se coupent en un unique point.*
   - *Chaque droite possède* $2^2-1=3$ *points (par la question 1).*
   - *Deux points distincts sont sur une (unique) droite (car deux vecteurs non colinéaires de* $\mathbb{F}_q^{n+1}$ *déterminent un plan).*
   - *Chaque point est sur exactement trois droites. En effet, étant donné un point* $a \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ *il y a* $7-1=6$ *autres éléments dans* $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$*. Pour chaque* $b \neq a$ *on peut construire la droite* (ab) *et cette droite contient exactement un autre point* $c \notin \{a,b\}$ *par ce qui précède.*

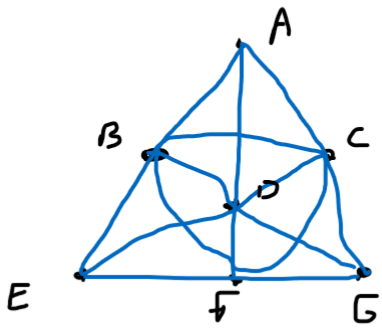
   Quitte à réordonner les points, on peut d'abord construire ces trois droites :



   (les trois droites passant par A*). Les points* E, F *coupent la droite* $\{A, C, G\}$*, quitte à renommer on suppose que l'intersection a lieu en* G*.*



   On regarde ensuite la droite contenant $\{E, D\}$*. Elle ne peut pas contenir* B *(sinon elle intersecterait la droite* $\{E, B, A\}$ *en deux points), de même elle ne peut contenir aucun des points* A, F, G*, donc elle contient* C*. On trouve de même que la droite contenant* G, D *contient* B *et que la droite contenant* F, C *contient* B*. On a bien 7 droites donc on a tout.*



4. Le Dobble est un jeu constitué de 55 cartes, chacune d'entre elles comportant huit symboles différents. Chaque carte a un unique symbole en commun avec chacune autre, le but du jeu est d'être le premier à trouver le symbole commun entre deux cartes données.
   (a) Voici deux cartes de Dobble. Quel est leur symbole commun ?
   (b) Expliquer comment construire un jeu de Dobble. *Correction : La phrase « chaque paire de carte contient un unique symbole en commun » fait penser à « chaque paire de droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ se coupe en un unique point ». On veut donc trouver q, où une carte (resp. un symbole) va correspondre à une droite (resp. un point) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$. Chaque carte possède 8 symboles, donc puisque une droite est un $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ on a $q^1+1=q+1$ symboles par cartes donc $q=7$. Le nombre de cartes est donc nécessairement plus petit que le nombre de droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$, qui est $\frac{(7^3-1)(7^2-1)}{(7^2-1)(7-1)} = \frac{7^3-1}{7-1} = 7^2+7+1 = 57$ (on avait déjà remarqué dans la question précédente que le nombre de droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ est égal à son nombre de points). On pourrait donc rajouter deux cartes !*

Exercice 11 (Droite projective réelle)

Démontrez que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$. *Correction : Par définition, on sait que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1/\!\sim$ où $\sim$ est la relation antipodale. Il reste à montrer que $\mathbb{S}^1/\!\sim\, \simeq \mathbb{S}^1$. Pour cela, on considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto z^2$. La restriction g de f à $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est continue et surjective dans $\mathbb{S}^1$, de plus si $z \in \mathbb{S}^1$ alors $-z \in \mathbb{S}^1$ et $g(-z) = g(z)$. Ainsi, l'application g se factorise en une application injective $\tilde{g} : \mathbb{S}^1/\!\sim\, \to \mathbb{S}^1$, qui reste continue (par définition de la topologie quotient) et surjective. Finalement, l'application g est une bijection continue. Sa réciproque reste continue puisqu'elle est fermée : en effet, si $F \subseteq \mathbb{S}^1/\!\sim$ est fermé alors F est compact puisque $\mathbb{S}^1/\!\sim\, = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est compact donc $g(F)$ est compact donc $g(F)$ est fermé (car $\mathbb{S}^1$ est séparé).*

Exercice 12 (Un peu de topologie)

Soit k un corps et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrez que l'on a une bijection $\mathbb{P}^n(k) \simeq k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$. *Correction : Un point $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ détermine une unique droite vectorielle, que l'on note $(x_0 : \ldots : x_n)$. Cela définit donc une application surjective $\phi_n : k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(k)$. Deux éléments de $(k^n \setminus \{0\}) \times \{0\}$ et $k^n \times \{1\}$ déterminent deux droites distinctes (ils ne sont pas proportionnels !) donc on en déduit que*

$$\mathbb{P}^n(k) = \phi_n((k^n \setminus \{0\}) \times \{0\}) \sqcup \phi_n(k^n \times \{1\}).$$

Le premier terme envoie $(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0)$ avec $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in k^n \setminus \{0\}$ sur $(x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0) = (\phi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) : 0)$, donc par définition ce terme s'identifie à $\mathbb{P}^{n-1}(k)$. Le second terme envoie

$(x_0, \ldots, x_{n-1}, 1)$ avec $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in k^n$ sur $(x_0 : \cdots : x_{n-1} : 1)$ donc ce terme s'identifie à k^n (des x_i différents menant à une droite différente). En résumé, on a :

$$\begin{array}{rcl} k^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(k) = k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k) \\ (x_0, \ldots, x_n) & \longmapsto & \begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{x_n} : \ldots : \dfrac{x_{n-1}}{x_n} : 1\right), & \text{si } x_n \neq 0, \\ (x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0), & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

le premier cas correspondant à k^n et le second à $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.

2. Dans cette union disjointe, que représente $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ pour $\mathbb{P}^n(k)$? *Correction : L'hyperplan à l'infini.*

On suppose maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Démontrez que $\mathbb{P}^n(k)$ hérite sa topologie de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de k^{n+1}. *Correction : On a une application $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(k)$ car une droite vectorielle de k^{n+1} possède (au moins) un vecteur unitaire (et un vecteur unitaire détermine une unique droite ; on a $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}(k^{n+1}) = \{(x_0, \ldots, x_n) \in k^n : |x_0|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1\}$). La topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$ est la topologie quotient.*
4. Montrez que ces espaces sont compacts et connexes par arcs. *Correction : Il a été vu en cours que $\mathbb{P}^n(k)$ est compact : on montre qu'il est séparé, et ensuite c'est l'image continue d'un compact (la projection canonique est continue par définition de la topologie quotient). Il est connexe par arc par image continue d'un connexe par arcs.*
5. Montrez que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$. *Correction : En identifiant $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$, on considère l'application (qui imite la projection stéréographique) :*

$$\sigma : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (x : y) & \longmapsto & \left(\frac{2x\bar{y}}{|x|^2+|y|^2}, \frac{|x|^2-|y|^2}{|x|^2+|y|^2}\right) \end{array} \right. .$$

Remarquons que la deuxième composante de σ s'écrit également $1 - 2\frac{|y|^2}{|x|^2+|y|^2}$.

- *Montrons tout d'abord que σ est bien définie. L'application $\tilde{\sigma} : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{S}^2$ définie comme σ est bien définie car pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on a $|x|^2 + |y|^2 \neq 0$. De plus, $\tilde{\sigma}$ vérifie $\tilde{\sigma}(\lambda(x, y)) = \tilde{\sigma}(x, y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ donc elle se factorise en l'application σ de l'énoncé. Pour $(x : y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ on a $(x, y) \neq (0, 0)$ donc $|x|^2 + |y|^2 \neq 0$.*
- *L'application σ est bien à valeurs dans $\mathbb{S}^2$.*
- *Montrons que σ est bijective. Pour cela, on va montrer que l'application $\rho : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donnée par :*

$$\rho(z, t) := \begin{cases} (z : 1 - t), & \text{si } t \neq 1, \\ (1 : 0), & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

est la bijection réciproque.

  - *Soit $(x : y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Si $y = 0$ alors $\sigma(x : y) = (0, 1)$ et on a bien $\rho(0, 1) = (1 : 0) = (x : y)$. On suppose maintenant $y \neq 0$, et on peut donc supposer $y = 1$. On a $\sigma(x : 1) = \left(\frac{2x}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right) =: (z, t)$ donc :*

$$t = 1 - \frac{2}{|x|^2 + 1},$$

  en particulier on a $t \neq 1$. On a alors :

$$z = \frac{2x}{|x|^2 + 1} = x(1 - t).$$

  donc $x = \frac{z}{1-t}$ et donc $(x : 1) = (z : 1 - t)$ comme annoncé.

  - *Soit $(z, t) \in \mathbb{S}^2$. Si $t = 1$ alors puisque $|z|^2 + t^2 = 1$ on a $z = 0$. On a alors $\rho(z, t) = (1 : 0)$ et $\sigma(1 : 0) = (0, 1) = (z, t)$ comme voulu. On suppose maintenant $t \neq 1$, ainsi $\rho(z, t) = (z : 1 - t)$. On a $|z|^2 + t^2 = 1$ donc :*

$$|z|^2 + (1 - t)^2 = |z|^2 + 1 + t^2 - 2t = 2 - 2t = 2(1 - t).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sigma(z:1-t) &= \left(\frac{2z(1-t)}{|z|^2+(1-t)^2}, 1-\frac{2(1-t)^2}{|z|^2+(1-t)^2}\right)\\ &= ((z, 1-(1-t))\\ &= (z,t).\end{aligned}$$

- *L'application σ est continue car c'est une fraction rationnelle. Pour donner plus de détails, en regardant sur les ouverts $(\mathbb{C}:1)$ et $(1:\mathbb{C})$ (note : par exemple, le premier est bien ouvert car son image réciproque par la surjection canonique est $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ qui est bien un ouvert de $\mathbb{C}^2$) l'application est bien continue, et puisque ces deux ouverts recouvrent $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ c'est gagné.*
- *Comme dans l'Exercice 11 on montre que σ est fermée et donc elle est bicontinue.*

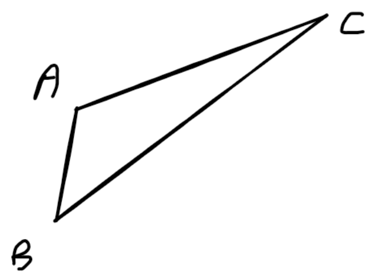
6. Montrez que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'une droite est homéomorphe à un disque ouvert. *Correction : Par la première question on a (informellement, on peut faire comme avant) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})\setminus D \simeq \mathbb{R}^2 \simeq$ disque ouvert, où $D\simeq\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est une droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

Envoi à l'infini

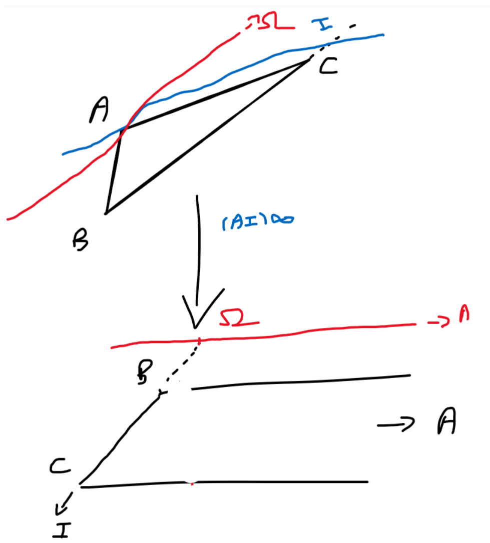
Exercice 13 (Un peu de dessin)

Soit Δ un triangle d'un plan projectif réel. Représenter Δ après avoir envoyé à l'infini :

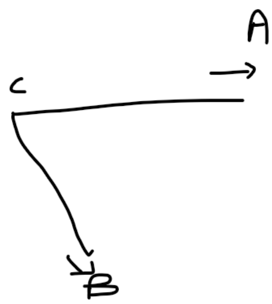
1. seulement un sommet ; *Correction : Principe général : les intersections sont conservées, et un point à l'infini est une « direction ». On considère le triangle suivant :*



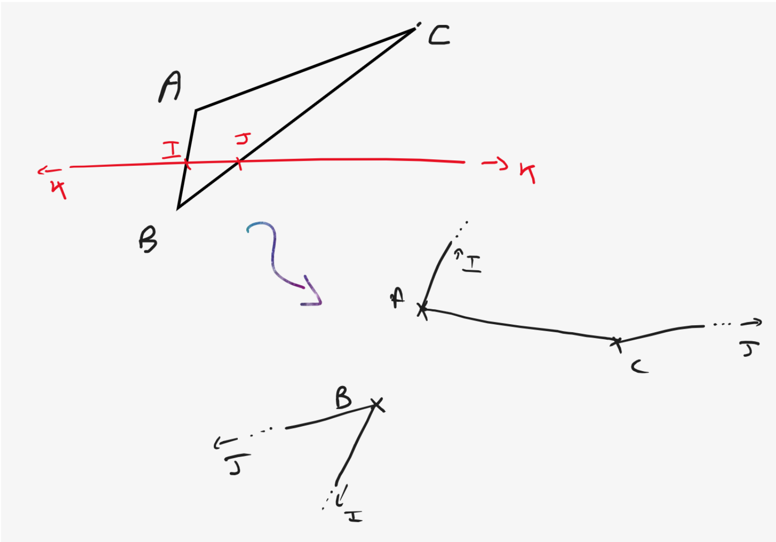
En envoyant une droite passant par A à l'infini (la droite ne passant ni par B ni par C), les droites (AB) et (AC) deviennent parallèle. En bleu la droite que l'on envoie à l'infini. En rouge, la parallèle à (BC) passant par A : la direction Ω revient dans le plan affine, elle coupe (BC) en Ω et passe par la direction A.



2. un côté ; *Correction : En envoyant (AB) à l'infini on obtient*

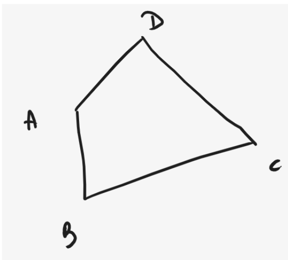


3. une droite rencontrant l'intérieur de Δ. *Correction : En envoyant une droite passant par l'intérieur de Δ, on trouve*

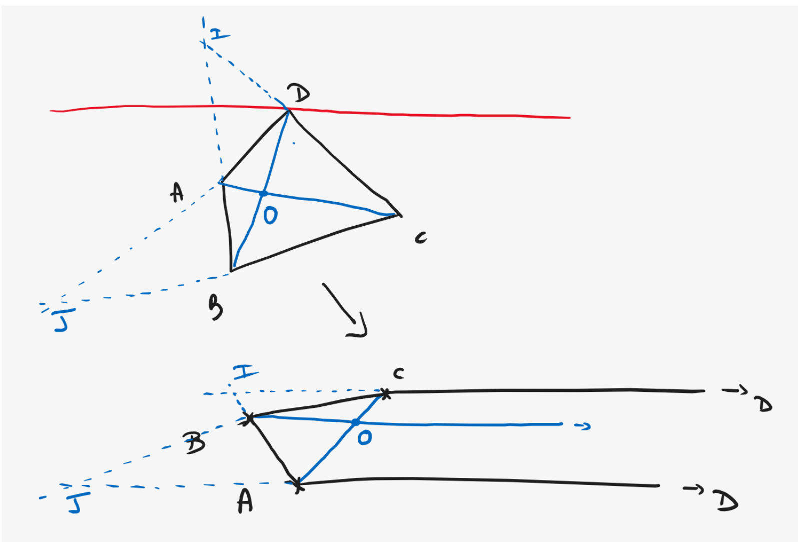


Soit Q un quadrilatère d'un plan projectif réel. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini :

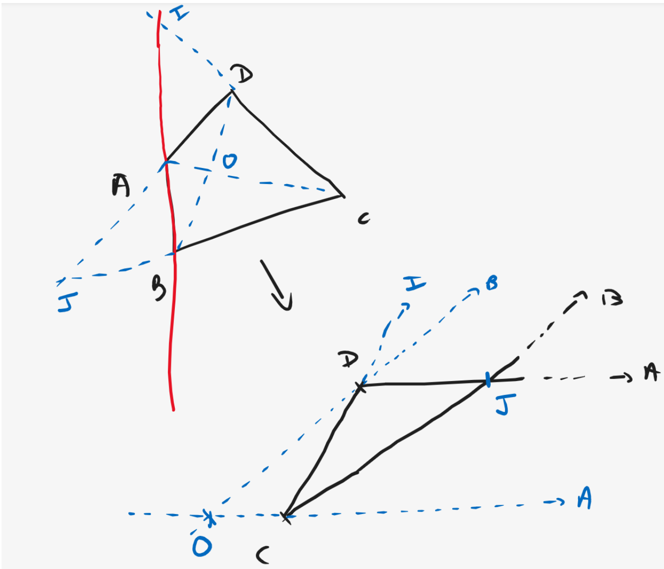
4. seulement un sommet ; *Correction : On considère maintenant le quadrilatère suivant :*



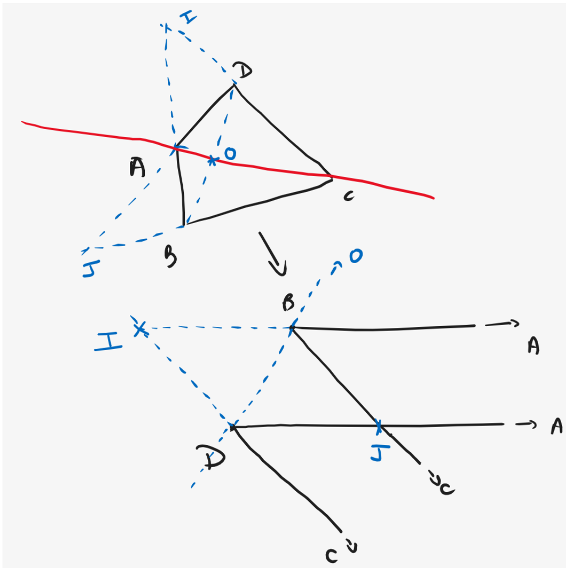
On envoie D à l'infini. On place des points A, B, C, on place la direction D (différente de celle de la droite (AB) car I reste dans le plan affine) puis on en déduit O, I, J.



5. seulement un côté ; *Correction : On envoie* (AB) *à l'infini. On place* C, D*, les directions* A, B *puis on en déduit les points* O, I, J.



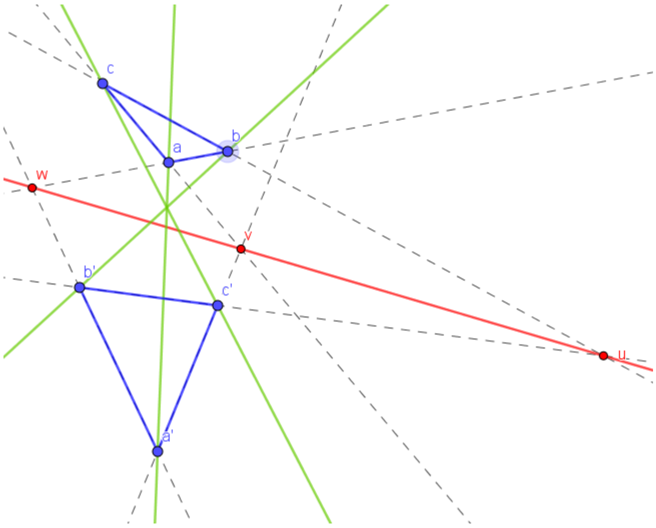
6. seulement une diagonale. *Correction : On envoie* (AC) *à l'infini. On place* B, D*, les directions* A, C *puis on en déduit* O, I, J.



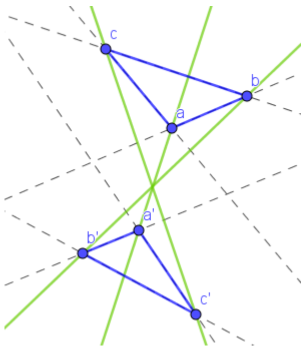
Exercice 14 (Théorème de Desargues)

Soit abc et $a'b'c'$ deux triangles. Soient u, v, w les points d'intersection des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$.

1. Faire un dessin. *Correction : Avec GeoGebra (où l'on peut faire bouger les points* a, b, c, a', b', c' *!) :*



2. Montrer que les points u, v, w sont alignés si et seulement si les droites aa', bb' et cc' sont concourantes.
Correction : On suppose que u, v et w sont alignés. On suppose que (aa') et (bb') se coupent en I et montrons que $I \in (cc')$. (Remarque : si (aa') et (bb') ne se coupent pas, alors par le cas que l'on va traiter alors nécessairement aucune de ces deux droites ne coupe (cc').) On envoie la droite (uv) ($\ni w$) à l'infini, de sorte que $(bc) \parallel (b'c')$ ($\ni u$), $(ca) \parallel (c'a')$ ($\ni v$) et $(ab) \parallel (a'b')$ ($\ni w$). On obtient alors la figure suivante :



Puisque $(ab) \parallel (a'b')$, par le théorème de Thalès on sait que l'homothétie h de centre I qui envoie a sur a' envoie également b sur b'. Puisque $(ac) \parallel (a'c')$, on sait que $h(c) \in (a'c')$ (c'est la réciproque de Thalès, puisque $a' = h(a)$), et de même on a $h(c) \in (b'c')$. Ainsi, nécessairement $h(c) = c'$ et donc $I \in (cc')$.
Réciproquement, on suppose que $(aa'), (bb')$ et (cc') sont concourantes en I et on veut montrer que u, v, w sont alignés.

Méthode 1 : *avec des barycentres. Par hypothèse, pour $x \in \{a, b, c\}$ il existe $\lambda_x, \lambda'_x \geqslant 0$ avec $\lambda_x + \lambda'_x = 1$ tels que $I = \operatorname{bar}\{(x, \lambda_x), (x', \lambda'_x)\}$. On a alors :*

$$\begin{aligned}(bc) \ni\ & \operatorname{bar}\{(b, \lambda_b), (c, -\lambda_c)\} \\ &= \operatorname{bar}\{\underbrace{(b, \lambda_b), (I, -1)}, \underbrace{(I, 1), (c, -\lambda_c)}\} \\ &= \operatorname{bar}\{(b', -\lambda'_b), (c', \lambda'_c)\} \in (b'c')\end{aligned}$$

(on a bien $\lambda_b \neq \lambda_c$ car si $\lambda_b = \lambda_c =: \lambda$ et $\lambda' := 1 - \lambda$ on aurait $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bI} + \overrightarrow{Ic} = -\frac{\lambda'}{\lambda}\overrightarrow{b'I} - \frac{\lambda'}{\lambda}\overrightarrow{Ic'} = -\frac{\lambda'}{\lambda}\overrightarrow{b'c'}$ donc $(bc) \parallel (b'c')$ donc u n'est pas dans le plan affine). donc

$$\operatorname{bar}\{(b, \lambda_b), (c, -\lambda_c)\} = \operatorname{bar}\{(b', -\lambda'_b), (c', \lambda'_c)\} = u.$$

De même on montre que

$$\operatorname{bar}\{(c, \lambda_c), (a, -\lambda_a)\} = \operatorname{bar}\{(c', -\lambda'_c), (a', \lambda'_a)\} = v,$$

et

$$\operatorname{bar}\{(a, \lambda_a), (b, -\lambda_b)\} = \operatorname{bar}\{(a', -\lambda'_a), (b', \lambda'_b)\} = w.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{bar}\{(b,\lambda_b),(c,-\lambda_c)\} \\ &= \mathrm{bar}\{\underbrace{(b,\lambda_b),(a,-\lambda_a)},\underbrace{(a,\lambda_a),(c,-\lambda_c)}\} \\ &= \mathrm{bar}\{(w,\lambda_b-\lambda_a),(v,\lambda_b-\lambda_c)\} \in (vw), \end{aligned}$$

donc u, v, w sont alignés.

Méthode 2 : *en utilisant la dualité.*

dans $\mathcal{P}$	*dans* $\mathcal{P}^*$
points a, b, c	*droites* a^*, b^*, c^*
triangle de sommets a, b, c	*triangle de côtés* a^*, b^*, c^*
côté (ab)	*sommet* $\gamma = a^* \cap b^*$
côté (bc)	*sommet* $\alpha = b^* \cap c^*$
côté (ca)	*sommet* $\beta = c^* \cap a^*$
point $u = (bc) \cap (b'c')$	*droite* $u^* = (\alpha\alpha')$
point $v = (ca) \cap (c'a')$	*droite* $v^* = (\beta\beta')$
point $w = (ab) \cap (a'b')$	*droite* $w^* = (\gamma\gamma')$
droite (aa')	*point* $a^* \cap a'^*$
droite (bb')	*point* $b^* \cap b'^*$
droite (cc')	*point* $c^* \cap c'^*$

Dire que $(aa'), (bb'), (cc')$ sont concourantes est équivalent à dire que $a^* \cap a'^*, b^* \cap b'^*, c^* \cap c'^*$ sont alignés. Mais $a^* = (\beta\gamma)$ (ces deux points étant sur a^*), de même $b^* = (\gamma\alpha)$ et $c^* = (\alpha\beta)$ et pareil a'^*, b'^*, c'^*. On a donc :

$$\begin{aligned} a^* \cap a'^* &= (\beta\gamma) \cap (\beta'\gamma'), \\ b^* \cap b'^* &= (\gamma\alpha) \cap (\gamma'\alpha'), \\ c^* \cap c'^* &= (\alpha\beta) \cap (\alpha'\beta'), \end{aligned}$$

donc dire que ces trois points sont alignés revient à appliquer le sens direct du théorème de Desargues dans les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$. On obtient donc que les droites $(\alpha\alpha'), (\beta\beta'), (\gamma\gamma')$ sont concourantes, i.e. les droites u^*, v^*, w^* sont concourantes donc les points u, v, w sont alignés.

Exercice 15

Soit d_0, d_1, d, d' 4 droites concourantes en un point m. Soit $o \neq m$ un point de d_1. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites concourantes en o (et distincts de d_1). On note $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$ et $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$. En envoyant une droite à l'infini et en utilisant le birapport, redémontrer le théorème de Thalès.

Homographies

Exercice 16 (Repère projectif d'une droite)

Soit E un k-espace vectoriel et soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. On pose $\phi := \mathbb{P}(f)$.

1. Pour l'application f, que dire d'un point fixe de ϕ ?
2. On suppose que $\dim \mathbb{P}(E) = 1$. Si ϕ admet trois points fixes, montrer que $\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)}$.

Exercice 17 (Points fixes)

On suppose que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soit $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ une homographie.

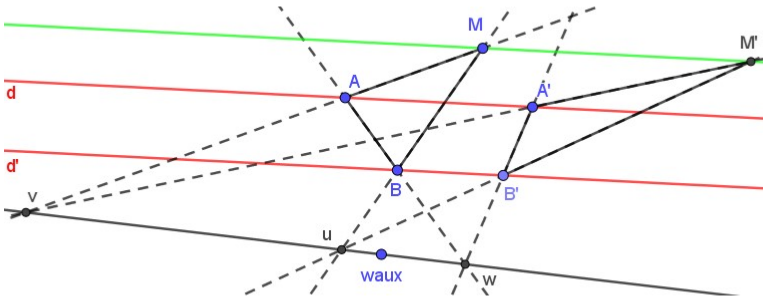
1. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Montrer que h possède un point fixe.

2. On suppose que $k = \mathbb{R}$ et $\dim E$ est impair. Montrer que h possède un point fixe.
3. Trouver un contre-exemple à la question précédente si $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 18 (Constructions à la règle)

Soient M un point et d, d' deux droites du plan affine.

1. On suppose que d et d' sont parallèles. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (unique) passant par M parallèle à d. *Correction : Il faut simplement utiliser le théorème de Desargues. Plus précisément :*
   (i) *on place deux points A, A' sur d puis deux points B, B' sur d' ;*
   (ii) *on place le point d'intersection w des droites (AB) et $(A'B')$;*
   (iii) *on choisit une droite δ passant par w ;*
   (iv) *on place le point d'intersection v (resp. u) des droites δ et (AM) (resp. (BM)) ;*
   (v) *on définit M' comme le point d'intersection de $(A'v)$ et $(B'u)$.*

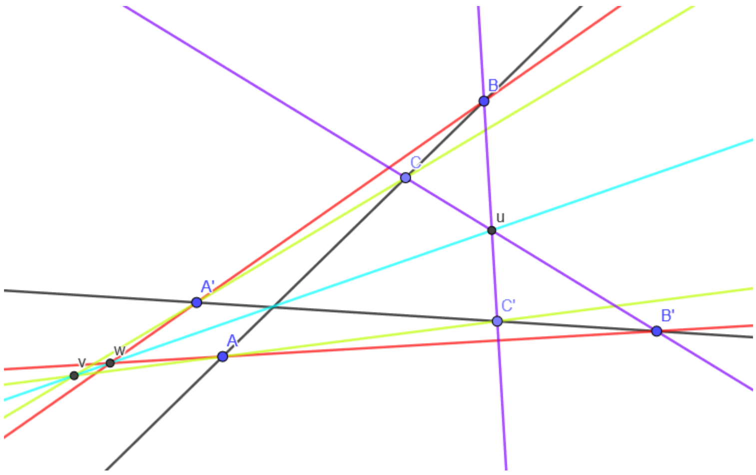


Ainsi, avec les points $C := M$ et $C' := M'$, les hypothèses du théorème de Desargues sont vérifiées. Les points u, v, w sont alignés par construction donc $(AA') = d, (BB') = d'$ et (CC') sont concourantes. Puisque d et d' sont parallèles (donc se coupent à l'infini) on en déduit que (CC') leur est également parallèle.

2. On suppose que d et d' sont sécantes en un point N. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (MN) lorsque N est en dehors de la feuille ou du tableau ? *Correction : C'est pareil !*

Exercice 19 (Image par une homographie)

Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' 3 points alignés sur une autre droite. Soit φ l'unique homographie qui envoie $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$. Construire $D' = \varphi(D)$ l'image de D un point de la droite (AB). On pourra écrire φ comme un produit de deux perspectives. *Correction : On considère la situation suivante.*



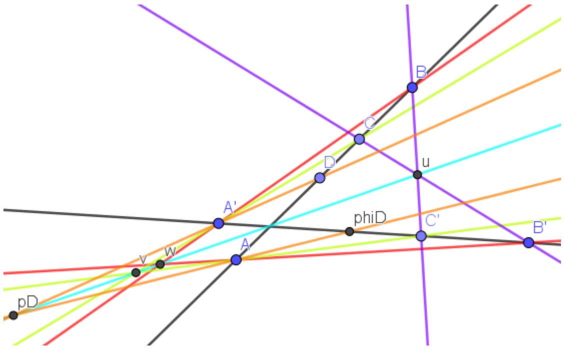
Les points u, v, w (intersection de (BC') et $(B'C)$, (AC') et $(A'C)$, (AB') et $(A'B)$) sont alignés par le théorème de Pappus. On note $d = (AB)$, $d' = (A'B')$ et $\delta = (uv)$ et on considère :

- *p la perspective de centre A' qui envoie d sur δ ;*
- *p' la perspective de centre A qui envoie δ sur d' ;*

et on pose $\psi := p' \circ p$. On a :

- $\psi(A) = A$;
- $\psi(B) = p' \circ p(B) = p'(w) = B'$;
- $\psi(C) = p' \circ p(C) = p'(v) = C'$.

Ainsi, les homographies $\varphi|_d$ et ψ de la droite d sur d' coïncident sur trois point distincts (qui forment donc un repère projectif) donc coïncident partout. En particulier, on a $\varphi(D) = \psi(D) = p' \circ p(D)$. On a $\{p(D)\} = (A'D) \cap \delta$ et $\{\varphi(D)\} = (p(D)A) \cap d'$:



Exercice 20 (Images des sommets d'un hexagone)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier et soit h une homographie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Étant données les images A', B', D', E' des points A, B, D, E respectivement, construire les images des points restants. *Correction : On utilise le procédé mis au point dans l'Exercice 19.*
2. Même question en supposant cette fois données les images A', B', C', D' des points A, B, C, D.

Exercice 21 (Images de parties du plan)

Déterminer :

1. l'image de $\mathbb{R}^2_{>0}$ par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$; *Correction : Le domaine est délimité par (une partie des) les axes : on va déterminer leur image. On rappelle que l'image d'une droite-cercle par une homographie reste une droite-cercle. On a :*

$$f(0) = -1, \qquad f(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i,$$
$$f(i) = 0, \qquad f(-i) = \infty,$$

et $f(\infty) = 1$ donc :

- *l'image de la droite $\mathbb{R}$ contient $-1, -i, 1$ donc c'est le cercle unité ;*
- *l'image de la droite $i\mathbb{R}$ contient $0, \infty, 1$ donc c'est l'axe réel.*

Puisque f restreinte à $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) est continue, elle conserve les composantes connexes donc l'image de $\mathbb{R}^2_{>0}$ est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{R})$. Puisque 1 est sur la frontière de $\mathbb{R}^2_{>0}$ on sait que $f(1) = -i$ est également sur la frontière de l'image, donc l'image est soit le demi-cercle ouvert inférieur soit le demi-plan inférieur ouvert privé du cercle fermé. Le même raisonnement avec i et $f(i) = 0$ montre que l'image est le demi-cercle ouvert inférieur.

2. l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par $z \mapsto \frac{2z-i}{2+iz}$; *Correction : Le domaine est délimité par l'axe réel et le cercle unité. On a $f(\infty) = -2i$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :*

$$f(\lambda i) = \frac{2\lambda i - i}{2 + 2i\lambda i} = \frac{(2\lambda - 1)i}{2(1-\lambda)},$$

donc :

$$f(0) = \frac{-i}{2}, \qquad f(i) = i, \qquad f(-i) = -i,$$

en particulier, l'image de $i\mathbb{R}$ contient $-2i$ et $\pm i$ donc c'est $i\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$f(1) = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{5} = \frac{3-4i}{5} =: \alpha,$$

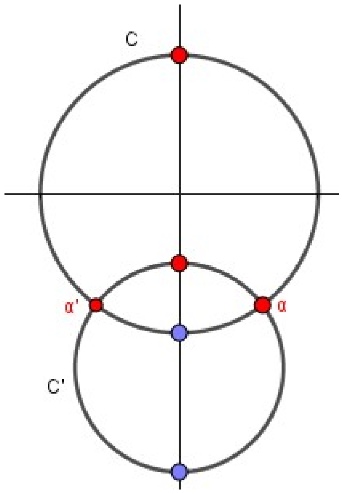
et :

$$f(-1) = \frac{-2-i}{2-i} = \overline{\left(\frac{-2+i}{2-i}\right)} = -\overline{f(1)}.$$

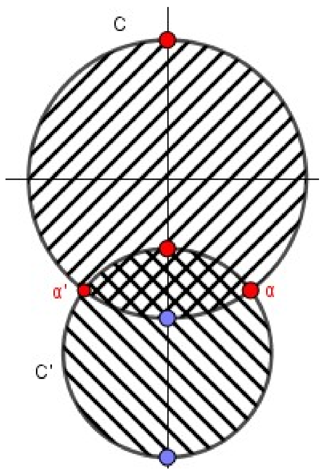
On en déduit que :

- *L'image de $\mathbb{S}^1$ contient $\pm i$ ainsi que α. On a $\operatorname{Re}\alpha > 0$ et $|\operatorname{Im}\alpha| < 1$ donc l'image de $\mathbb{S}^1$ est le cercle $\mathcal{C}$ dont un diamètre est d'extrémités $\pm i$.*
- *L'image de $\mathbb{R}$ contient $\frac{-i}{2}, 2i$ et α. Comme avant, on a $\operatorname{Re}\alpha > 0$ et $\frac{-1}{2} > \operatorname{Im}\alpha > -2$ donc l'image de $\mathbb{R}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ donc un diamètre est d'extrémités $\frac{-i}{2}$ et $-2i$.*

Comme pour la question précédente, on cherche une partie connexe du dessin suivant qui touche les trois points rouges :



Il n'y a donc pas le choix ! (On peut aussi constater que $0 = f(i/2)$ est bien dedans.) C'est la partie simplement hachurée du sud-ouest vers le nord-est.



3. l'image de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{>0} : y < x\}$ par $z \mapsto \frac{z}{z-1}$;
4. l'image de $]0,1[\times\mathbb{R}$ par $z \mapsto \frac{z-1}{z}$ puis par $z \mapsto \frac{z-1}{z-2}$.