Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°4

Groupes orthogonaux

Exercice 1 (Actions de SO sur la sphère et l'espace projectif)

1. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur la sphère euclidienne S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un vecteur $x \in S^n$; est-il connexe ?
2. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un point $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; est-il connexe ?

Exercice 2 (Décomposition de Choleski et décomposition QR)

Dans cet exercice on étudie deux décompositions matricielles classiques qui sont des conséquences du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On note $\mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et $T_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. (Décomposition de Choleski) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}TT$.
2. (Décomposition QR) En utilisant la décomposition de Choleski, démontrez que pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = QR$.

Remarque : on peut montrer que les applications

$$T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R}),\ T \mapsto {}^{\mathrm{t}}TT \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (Q,R) \mapsto QR$$

sont des homéomorphismes.

3. (Inégalité de Hadamard) Démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n ||C_j||$ où $||C_j||$ désigne la norme euclidienne de la j-ième colonne de A.
(*Indication : considérer la décomposition de Choleski de $B := {}^{\mathrm{t}}AA$ et en particulier les coefficients diagonaux de B.*)

1. Soit $A \in \mathrm{SPD}_n(\mathbb{R})$. On veut trouver $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = T^\top T$. La transposée doit faire penser au produit scalaire, ainsi si on a un tel T on a
$$\phi_A(x,y) := \langle x, Ay\rangle = \langle x, T^\top Ty\rangle = \langle Tx, Ty\rangle.$$
Les coefficients de $A = (a_{ij})$ sont donnés par $a_{ij} = \langle e_i, Ae_j\rangle$ si (e_i) est la base canonique. On reprend maintenant l'exercice. Puisque A est symétrique définie positive, la forme bilinéaire ϕ_A est un produit scalaire. Ainsi, si (e_i) est la base canonique on peut l'orthonormaliser pour le produit scalaire ϕ_A. On trouve alors une base (e'_i) orthonormale pour ϕ_A donnée par $e'_j = \sum_{i \leqslant j} \tilde{t}_{ij} e_i$ pour $\tilde{t}_{ii} > 0$. Par définition on a $\tilde{T} := (\tilde{t}_{ij}) \in T_n^+(\mathbb{R})$ et $\tilde{T} = \mathrm{mat}_e e'$. On a également $T := \tilde{T}^{-1} \in T_n^+(\mathbb{R})$ (car l'inverse est un polynôme en la matrice, par exemple par Cayley–Hamilton, et les coefficients diagonaux sont inversés) et $T = \mathrm{mat}_{e'} e$. On a alors :
$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \langle e_i, Ae_j\rangle \\
&= \sum_{\substack{i' \leqslant i \\ j' \leqslant j}} t_{i'i} t_{j'j} \langle e'_{i'}, Ae'_{j'}\rangle \\
&= \sum_{\substack{i' \leqslant i \\ j' \leqslant j}} t_{i'i} t_{j'j} \phi_A(e'_{i'}, e'_{j'}) \\
&= \sum_{\substack{i' \leqslant i \\ j' \leqslant j}} t_{i'i} t_{j'j} \delta_{i'j'} \\
&= \sum_{k \leqslant \min(i,j)} t_{ki} t_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^n t_{ki} t_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^n t_{ik}^\top t_{kj} \\
&= (T^\top T)_{ij},
\end{aligned}$$

ainsi $A = T^\top T$. Autres méthodes :

- on utilise l'unicité de la décomposition LU en écrivant $L = L'D$ avec D diagonale et on transpose ;
- par récurrence.

Une fois qu'on sait que la décomposition existe, pour calculer T on peut simplement trouver ses coefficients en résolvant le système $A = T^\top T$, et il se trouve qu'on trouve des uniques solutions pour les coefficients. On peut aussi voir l'unicité de la façon suivante : si $T^\top T = U^\top U$ avec $T, U \in T_n^+(\mathbb{R})$, alors $U^{-\top}T = UT^{-1}$ est triangulaire supérieure et inférieure donc elle est diagonale (rappelons que l'inverse d'une matrice est un polynôme en cette matrice, cf. Cayley-Hamilton, donc l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure le reste). De plus, les coefficients diagonaux de $U^{-\top}T$ sont les $u_i^{-1}t_i$, ceux de UT^{-1} sont $u_i t_i^{-1}$, donc finalement $u_i^{-1}t_i = u_i t_i^{-1}$ donc $t_i^2 = u_i^2$ donc $t_i = u_i$ car les coefficients diagonaux sont positifs donc $UT^{-1} = I_n$.

2. Analyse : si $M = QR$ alors $M^\top M = R^\top Q^\top QR = R^\top R$. Synthèse : la matrice $M^\top M$ est symétrique définie positive (définie puisque M est inversible), ainsi elle possède une décomposition de Choleski $M^\top M = R^\top R$ avec $R \in T_n^+(\mathbb{R})$. La matrice $Q \coloneqq MR^{-1}$ vérifie
$$Q^\top Q = R^{-\top}M^\top MR^{-1} = R^{-\top}(R^\top R)R^{-1} = I_n,$$
donc $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On peut aussi remarquer que $M = QR$ résulte du procédé de Gram–Schmidt, la matrice R étant la matrice de changement de base et Q la matrice d'une BON dans la base canonique (qui est aussi une BON) donc orthogonale. Pour l'unicité, l'unicité de R découle de l'analyse et de l'unicité dans Choleski, donc $Q = MR^{-1}$ également (R est bien inversible puisque dans $T_n^+(\mathbb{R})$).

3. L'inégalité est vérifiée si A n'est pas inversible. Si maintenant A est inversible, on a $A^\top A \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ donc on peut écrire $A^\top A = T^\top T$ avec $T \in T_n^+(\mathbb{R})$. On a alors $\det(A)^2 = \det\big(A^\top A\big) = \det(T^\top T) = \det(T)^2$. Par la question **1**, on a :
$$\big(A^\top A\big)_{ii} = \sum_{k=1}^n t_{ki}^2 \geqslant t_{ii}^2,$$
de plus puisque T est triangulaire on a $\det T = \prod_{i=1}^n t_{ii}$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$ on a $A^\top A = \big(C_i^\top C_j\big)_{ij}$ donc l'inégalité précédente donne
$$\begin{aligned}|\det A|^2 &= |\det T|^2 \\ &= \prod_{i=1}^n t_{ii}^2 \\ &\leqslant \prod_{i=1}^n \big(A^\top A\big)_{ii} \\ &\leqslant \prod_{i=1}^n C_i^\top C_i \\ &\leqslant \prod_{i=1}^r \|C_i\|^2,\end{aligned}$$
d'où le résultat.

Exercice 3 (Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $(-,-)$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute paire de vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose $\langle x, y\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gx, gy)$.

1. Démontrez que $\langle -,-\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Démontrez que $\langle -,-\rangle$ est G-invariant, au sens où $\langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $g \in G$.

3. Déduisez-en que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, une variante de cette méthode, utilisant l'intégration pour la *mesure de Haar* de G au lieu de la sommation $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}$ permet de montrer que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Immédiat.

2. On utilise le théorème de Cayley : pour $h \in G$, l'application $g \mapsto hg$ de G dans G est une bijection.

3. Analyse : on veut montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $PgP^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $g \in G$. Ainsi, on a
$$\big(P^{-\top}g^\top P^\top\big)\, PgP^{-1} = I_n,$$
donc
$$g^\top P^\top Pg = P^\top P.$$
Synthèse : si M est la matrice de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, par la question précédente on a $g^\top Mg = M$ pour tout $g \in G$. Si maintenant $P \in T_n^+(\mathbb{R})$ est obtenue via la décomposition $M = P^\top P$ de M, qui existe puisque $M \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$, on a $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et la relation précédente est vérifiée, d'où le résultat.