UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°3 : Géométrie affine, géométrie projective

Géométrie affine

Exercice 1 (Sous-espaces parallèles)

1. Montrer que dans un espace affine $\mathcal{E}$, deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou égaux.
2. Montrer que si $\dim \mathcal{E} = 2$ alors deux droites affines disjointes sont parallèles.
3. Donner un exemple de deux droites de $\mathbb{R}^3$ disjointes et non-parallèles.

1. Soient $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{F}' = A' + F$ avec $A, A' \in \mathcal{E}$ et F, F' sous-ev de la direction E de $\mathcal{E}$. Si $\overrightarrow{AA'} \in F$ alors $A' = A + \overrightarrow{AA'} \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, et de même on a l'inclusion réciproque donc $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. Si maintenant $\overrightarrow{AA'} \notin F$ alors si $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ alors $C = A + u = A' + u'$ avec $u, u' \in F$ donc $\overrightarrow{AA'} = u' - u \in F$ ce qui est absurde.
2. Soient $\mathcal{D} = A + D$ et $\mathcal{D}' = B' + D'$. Si $D \neq D'$ (i.e. les droites ne sont pas parallèles) alors $D \oplus D' = E$ donc $\overrightarrow{AA'} = d + d'$ avec $d \in D$ et $d' \in D'$. Ainsi, on a $A' = A + d + d'$ donc $A' - d' = A + d \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.
3. $\mathbb{R}(1,0,0)$ et $\mathbb{R}(0,1,0) + (0,0,1)$ sont deux droites de $\mathbb{R}^3$ disjointes mais non parallèles.

Exercice 2 (Sous-espaces dont les directions engendrent E)

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F, G et E. On suppose que $F + G = E$. Montrer que tout sous-espace parallèle à $\mathcal{G}$ rencontre $\mathcal{F}$.

Exercice 3 (Images et images réciproques de sous-espaces)

1. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Montrer que l'image d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine. Montrer que l'image réciproque d'un sous-espace affine $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ est soit vide, soit un sous-espace affine.
2. Montrer qu'une application affine envoie 3 points alignés sur 3 points alignés.

1. Soit $\mathcal{F} = A + F$. On a

$$\begin{aligned} M \in f(\mathcal{F}) &\iff \exists x \in F, M = f(A+x) \\ &\iff \exists x \in F, M = f(A) + \overrightarrow{f}(x) \\ &\iff \exists y \in \overrightarrow{f}(F), M = f(A) + y \\ &\iff M \in f(A) + \overrightarrow{f}(F), \end{aligned}$$

donc $f(\mathcal{F}) = f(A) + \overrightarrow{f}(F)$ est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$.
Soit maintenant $\mathcal{F}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ de direction F'. On suppose que $f^{-1}(\mathcal{F}') \neq \emptyset$. Soit $B \in f^{-1}(\mathcal{F}')$ et montrons que $f^{-1}(\mathcal{F}') = B + \overrightarrow{f}^{-1}(F')$. On a $\mathcal{F}' = f(B) + F$ et donc

$$\begin{aligned} M \in f^{-1}(\mathcal{F}') &\iff f(M) \in \mathcal{F}' \\ &\iff f(M) = f(B) + F' \\ &\iff \overrightarrow{f(B)f(M)} \in F' \\ &\iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{BM}) \in F' \\ &\iff \overrightarrow{BM} \in \overrightarrow{f}^{-1}(F') \\ &\iff M \in B + \overrightarrow{f}^{-1}(F'), \end{aligned}$$

comme annoncé.
2. Par la question 1, l'image d'une droite affine est soit un point soit une droite affine, ce qui prouve le résultat (en particulier, l'image de trois points alignés peut être réduite à un point).

Exercice 4 (Repères affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $n \coloneqq \dim \mathcal{E}$. On dit que $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ forment un *repère affine* de $\mathcal{E}$ si la famille $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\right)$ est une base de E.

1. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Montrer que $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ forment un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés.
2. Montrer que si une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ vérifie $f(A_i) = A_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ alors $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

1. A_0, A_1, A_2 forment un repère affine ssi $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2})$ est libre ssi A_0, A_1, A_2 sont deux à deux distincts et $\overrightarrow{A_0A_2} \neq \lambda \overrightarrow{A_0A_1}$ pour tout $\lambda \in k$ ssi A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés.
2. Soit $A \in \mathcal{E}$. Par hypothèse on peut écrire $\overrightarrow{A_0A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$, donc

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A_0) + \vec{f}(\overrightarrow{A_0A}) \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{A_0A_i}) \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)} \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i} \\ &= A_0 + \overrightarrow{A_0A} \\ &= A. \end{aligned}$$

   Ainsi on a bien $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Exercice 5 (Groupe des homothéties et translations)

Montrer que l'ensemble des homothéties de rapport non nul et des translations de $\mathcal{E}$ forme un groupe.
(*Attention, il s'agit ici d'homothéties affines alors que l'exercice 4 de la feuille 2 utilisait des homothéties linéaires.*)

Lemme. *Soit f une application affine de partie linéaire $\lambda \mathrm{id}_E$ pour $\lambda \in k^\times$. Si $\lambda = 1$ alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$, sinon f est une homothétie de centre $f(A) + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Af(A)}$ (pour n'importe quel point A).*

Démonstration. Remarquons d'abord que la réciproque est vérifiée (et si $\lambda = 0$ alors f est constante). On suppose $\lambda = 1$. (Faire un dessin.) Par définition on a alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)B}$ donc $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)} =: u$. On a alors $f = t_u$ puisque $f(A) = A + \overrightarrow{Af(A)} = A + u$.

On suppose maintenant $\lambda \neq 1$. Montrons que f possède un point fixe Ω. On a :

$$\begin{aligned} f(\Omega) = \Omega &\iff f(A) + \lambda\overrightarrow{A\Omega} = \Omega \\ &\iff \lambda\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{f(A)\Omega} \\ &\iff \lambda\overrightarrow{Af(A)} + \lambda\overrightarrow{f(A)\Omega} = \overrightarrow{f(A)\Omega} \\ &\iff \lambda\overrightarrow{Af(A)} = (1-\lambda)\overrightarrow{f(A)\Omega} \\ &\iff \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{f(A)\Omega} \\ &\iff \Omega = f(A) + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Af(A)}. \end{aligned}$$

Pour un point A fixé, on va montrer que $f = h_{\Omega,\lambda}$ (et donc Ω sera nécessairement unique). En effet, on a :

$$\begin{aligned} f(B) &= f(A) + \lambda\overrightarrow{AB} \\ &= f(A) + \lambda\overrightarrow{A\Omega} + \lambda\overrightarrow{\Omega B} \\ &= \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega B}. \end{aligned}$$

□

On sait déjà que l'ensemble en question est stable par inversion, il reste donc à montrer qu'il est stable par produit.

- L'ensemble des translations forme bien un groupe, puisque $t_u t_v(A) = t_v(A) + u = A + v + u = t_{u+v}(A)$.

- Soient $A, B \in \mathcal{E}$ et $\lambda, \mu \in k^\times$. L'application $f \coloneqq h_{A,\lambda} h_{B,\mu}$ est affine de partie linéaire $\lambda \mathrm{id}_E \mu \mathrm{id}_E = \lambda\mu \mathrm{id}_E$. Ainsi, si $\lambda\mu = 1$ alors $h_{A,\lambda} h_{B,\mu}$ est une translation, et si $\lambda\mu \neq 1$ alors $h_{A,\lambda} h_{B,\mu}$ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$. On a :

$$\begin{aligned} f(B) &= h_{A,\lambda} h_{B,\mu}(B) \\ &= h_{A,\lambda}(B) \\ &= A + \lambda \overrightarrow{AB} \\ &= B + \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AB} \\ &= B + (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}, \end{aligned} \tag{†}$$

en particulier

$$\overrightarrow{Bf(B)} = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}. \tag{‡}$$

  – Si $\lambda\mu = 1$ alors par le lemme on a $f = t_u$ avec $u = (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}$ par (‡).
  – Si $\lambda\mu \neq 1$, on sait que $f = h_{\Omega,\lambda\mu}$ pour $\Omega = f(C) + \frac{1}{(\lambda\mu)^{-1}-1}\overrightarrow{Cf(C)}$ pour n'importe quel point C. Avec $C = B$ et (†), (‡) on trouve

$$\begin{aligned} \Omega &= f(B) + \frac{1}{(\lambda\mu)^{-1} - 1}\overrightarrow{Bf(B)} \\ &= \left[B + (\lambda - 1)\overrightarrow{AB}\right] + \frac{\lambda - 1}{(\lambda\mu)^{-1} - 1}\overrightarrow{AB} \\ &= B + (\lambda - 1)\left(1 + \frac{1}{(\lambda\mu)^{-1} - 1}\right)\overrightarrow{AB} \\ &= B + (\lambda - 1)\frac{(\lambda\mu)^{-1}}{(\lambda\mu)^{-1} - 1}\overrightarrow{AB} \\ &= B + \frac{\lambda - 1}{1 - \lambda\mu}\overrightarrow{AB} \\ &= B + \frac{\lambda - 1}{\lambda\mu - 1}\overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

- La partie linéaire de $f \coloneqq h_{A,\lambda} t_u$ est $\lambda \mathrm{id}_E$ donc par le lemme on a $h_{A,\lambda} t_u = h_{\Omega,\lambda}$ (on peut supposer $\lambda \neq 1$ sinon $h_{A,\lambda}$ est une translation et on a déjà traité ce cas) pour Ω donné par $\Omega = f(C) + \frac{1}{\lambda^{-1}-1}\overrightarrow{Cf(C)}$ pour n'importe quel point C. Avec $C = A$ on a

$$\begin{aligned} f(A) &= h_{A,\lambda} t_u(A) \\ &= h_{A,\lambda}(A + u) \\ &= h_{A,\lambda}(A) + \lambda u \\ &= A + \lambda u, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Omega &= f(A) + \frac{1}{\lambda^{-1} - 1}\overrightarrow{Af(A)} \\ &= A + \lambda u + \frac{1}{\lambda^{-1} - 1}\lambda u \\ &= A + \lambda\left(1 + \frac{1}{\lambda^{-1} - 1}\right)u \\ &= A + \frac{1}{\lambda^{-1} - 1}u. \end{aligned}$$

- Pour $t_u h_{A,\lambda}$, on a :

$$\begin{aligned} (t_u h_{A,\lambda})^{-1} &= h_{A,\lambda}^{-1} t_u^{-1} \\ &= h_{A,\lambda^{-1}} t_{-u} \\ &= h_{\Omega',\lambda^{-1}}, \end{aligned}$$

avec $\Omega' = A - \frac{1}{\lambda - 1}u$, donc

$$t_u h_{A,\lambda} = h_{\Omega',\lambda^{-1}}^{-1} = h_{\Omega',\lambda}.$$

Exercice 6 (Structure affine sur l'ensemble des supplémentaires d'un sous-espace vectoriel)

Soient E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des supplémentaires de F dans E est muni d'une structure d'espace affine de direction $S = \mathscr{L}(E/F, F)$.

1. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique et $\mathscr{S}'$ l'ensemble des *sections* de π, c'est-à-dire les applications linéaires $s : E/F \to E$ telles que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$. Construisez une bijection $\mathscr{S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}'$:
   (a) Si $G \overset{i}{\hookrightarrow} E$ est un supplémentaire de F, montrez que $\pi_{|G}$ est un isomorphisme et $s := i \circ \pi_{|G}^{-1}$ une section de π ;
   (b) Si s est une section de π, montrez que $G = \mathrm{im}(s)$ est un supplémentaire de F.

On est ramené à montrer que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine.

2. Montrez que le noyau de l'application $\Phi : \mathscr{L}(E/F, E) \to \mathscr{L}(E/F, E/F)$, $s \mapsto \pi \circ s$ est égal à $S = \mathscr{L}(E/F, F)$.
3. Montrez que $\mathscr{S}' = \Phi^{-1}(\mathrm{Id})$ et déduisez-en que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine de direction S.

Exercice 7 (Structure affine sur $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F.

1. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est un espace vectoriel de manière naturelle.
2. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un espace affine de direction $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$.

1. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathrm{Appl}(\mathcal{E}, F)$ des applications de $\mathcal{E}$ vers F. Remarquons que dans F vu comme espace affine de direction F on a $\overrightarrow{uv} = v - u$ pour $u, v \in F$ (c'est bien l'unique vecteur de F dont l'action sur u donne v). On a bien $0 \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ (de partie linéaire $0 \in \mathscr{L}(E, F)$) puisque $\overrightarrow{00} = 0 = \overrightarrow{0}(\overrightarrow{uv})$. Si $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ de partie linéaire $\phi \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in k$ alors λf est bien dans $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ de partie linéaire $\lambda\phi \in \mathscr{L}(E, F)$, puisque $\overrightarrow{\lambda f(u)\lambda f(v)} = \lambda\big(f(v) - f(u)\big) = \lambda\overrightarrow{f(u)f(v)} = \lambda\phi(\overrightarrow{uv})$. Finalement, si $f, g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ de parties linéaires respectives $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $\overrightarrow{(f+g)(u)(f+g)(v)} = (f+g)(v) - (f+g)(u) = \big[f(v) - f(u)\big] + \big[g(v) - g(u)\big] = \overrightarrow{f(u)f(v)} + \overrightarrow{g(u)g(v)} = \phi(\overrightarrow{uv}) + \psi(\overrightarrow{uv}) = (\phi + \psi)(\overrightarrow{uv})$.
2. On montre d'abord que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ agit sur $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. C'est bien le cas cas si $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$, de parties linéaires respectives $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E, F)$ alors $f \dotplus g$ est l'élément de $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ qui envoie $A \in \mathcal{E}$ sur $f(A) + g(A)$ et de partie linéaire $\phi + \psi$ (c'est bien une action : on est bien affine par définition, si on agit par 0 alors on ne bouge pas, et on est associatif). L'action est bien transitive car si $f_1, f_2 \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ de parties linéaires respectives $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{L}(E, F)$ alors on considère $g : \mathcal{E} \to F$ donnée par $g(A) := f_2(A) - f_1(A) = \overrightarrow{f_1(A)f_2(A)}$ pour tout $A \in \mathcal{E}$. On a bien $g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ puisque $\overrightarrow{g(A)g(B)} = g(B) - g(A) = \big[f_2(B) - f_1(B)\big] - \big[f_2(A) - f_1(A)\big] = \big[f_2(B) - f_2(A)\big] - \big[f_1(B) - f_1(A)\big] = \phi_2(\overrightarrow{AB}) - \phi_1(\overrightarrow{AB}) = (\phi_2 - \phi_1)(\overrightarrow{AB})$, donc g est de partie linéaire $\psi := \phi_2 - \phi_1$. Par définition on a $f_2 = f_1 \dotplus g$, et par définition de $\dotplus$ l'application g est nécessairement celle construite ci-avant.

Espace projectif

Exercice 8 (Points et droites de l'espace projectif)

1. Déterminer le nombre de points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
2. On suppose $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ (on pourra utiliser une action transitive bien choisie).
3. Représenter les éléments de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ et tracer les droites. On parle du *plan de Fano*.
4. Le Dobble est un jeu constitué de 55 cartes, chacune d'entre elles comportant huit symboles différents. Chaque carte a un unique symbole en commun avec chacune autre, le but du jeu est d'être le premier à trouver le symbole commun entre deux cartes données.
   (a) Voici deux cartes de Dobble. Quel est leur symbole commun ?
   (b) Expliquer comment construire un jeu de Dobble.

1. On donne deux rédactions.
   - Un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{F}_q^{n+1}$. Deux points $x, y \in \mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\}$ sont sur la même droite ssi $y = \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$, donc une droite possède exactement $\#\mathbb{F}_q^\times = q - 1$ points. Puisque $\#\mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\} = q^{n+1} - 1 = (q-1)\sum_{i=0}^n q^i$, on en déduit que $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \sum_{i=0}^n q^i$.
   - Cette rédaction se généralise à la question précédente (et même plus généralement). Le groupe $\mathrm{GL}_{n+1}(q)$ agit transitivement sur les droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^{n+1}$. Si D est une telle droite, par la relation orbite-stabilisateur on a $\#\mathrm{GL}_{n+1}(q) = \#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D \#(\mathrm{GL}_{n+1}(q) \cdot D) = \#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D \#\{\text{droites vectorielles de } \mathbb{F}_q^{n+1}\} = \#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D \#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.

Il reste donc à calculer le cardinal du stablisateur $\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D$. On voit facilement que, dans une base adaptée fixée, un élément du stablisateur est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & *' \\ 0 & M \end{smallmatrix}\right)$ où $* \in \mathbb{F}_q^\times$, $*' \in \mathrm{M}_{n,1}(q)$ et $M \in \mathrm{GL}_n(q)$, ainsi $\#\mathrm{GL}_{n+1}(q)_D = q^n(q-1)\#\mathrm{GL}_n(q)$. On en déduit que

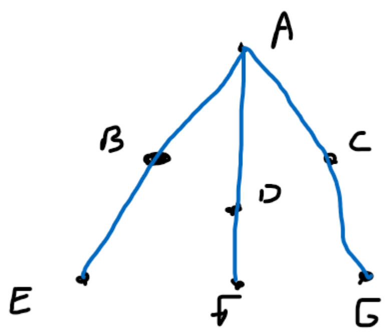
$$\begin{aligned}
\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) &= \frac{\#\mathrm{GL}_{n+1}(q)}{q^n(q-1)\#\mathrm{GL}_n(q)} \\
&= q^{n(n+1)/2-n(n-1)/2-n} \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)\dots(q-1)}{(q-1)(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q-1)} \\
&= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \\
&= q^n + \dots + q + 1.
\end{aligned}$$

2. Les droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ correspondent aux plans vectoriels de $\mathbb{F}_q^{n+1}$. Le groupe $\mathrm{GL}_{n+1}(q)$ agit transitivement sur ces plans, donc comme avant le nombre N de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ est donné par $\mathrm{GL}_{n+1}(q)/\mathrm{GL}_{n+1}(q)_P$ où $\mathrm{GL}_{n+1}(q)_P$ est le stabilisateur d'un plan vectoriel P (quelconque). Dans une base adaptée fixée, un élément de ce stablisateur est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} M & M' \\ 0 & M'' \end{smallmatrix}\right)$ avec $M \in \mathrm{GL}_2(q), M'' \in \mathrm{GL}_{n-1}(q)$ et $M' \in \mathrm{M}_{2,n-1}(q)$. On en déduit que

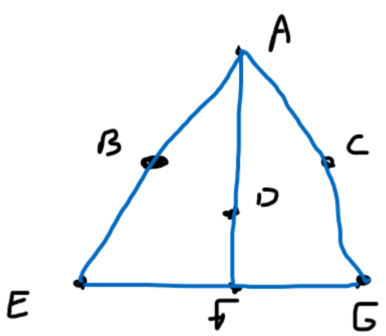
$$\begin{aligned}
N &= \frac{\#\mathrm{GL}_{n+1}(q)}{\#\mathrm{GL}_2(q)\#\mathrm{GL}_{n-1}(q)\#\mathrm{M}_{2,n-1}(q)} \\
&= q^{\left[n(n+1)-(n-1)(n-2)\right]/2-3-2(n-1)} \frac{(q^{n+1}-1)\dots(q-1)}{(q^2-1)(q-1)\times(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)} \\
&= q^{\left[n^2+n-(n^2-3n+2)\right]/2-1-2n} \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)} \\
&= \frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)(q-1)}.
\end{aligned}$$

3. Pour $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ on trouve $\frac{(2^3-1)(2^2-1)}{(2^2-1)(2-1)} = 2^3-1 = 7$ droites. On sait que :
   - Deux droites se coupent en un unique point.
   - Chaque droite possède $2^2-1=3$ points (par la question 1).
   - Deux points distincts sont sur une (unique) droite (car deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{F}_q^{n+1}$ déterminent un plan).
   - Chaque point est sur exactement trois droites. En effet, étant donné un point $a \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ il y a $7-1=6$ autres éléments dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$. Pour chaque $b \neq a$ on peut construire la droite (ab) et cette droite contient exactement un autre point $c \notin \{a,b\}$ par ce qui précède.

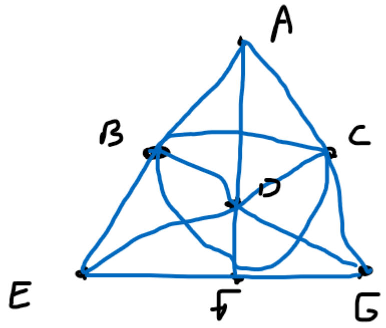
   Quitte à réordonner les points, on peut d'abord construire ces trois droites :



(les trois droites passant par A). Les points E, F coupent la droite $\{A, C, G\}$, quitte à renommer on suppose que l'intersection a lieu en G.



On regarde ensuite la droite contenant $\{E, D\}$. Elle ne peut pas contenir B (sinon elle intersecterait la droite $\{E, B, A\}$ en deux points), de même elle ne peut contenir aucun des points A, F, G, donc elle contient C. On trouve de même que la droite contenant G, D contient B et que la droite contenant F, C contient B. On a bien 7 droites donc on a tout.



4. La phrase « chaque paire de carte contient un unique symbole en commun » fait penser à « chaque paire de droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ se coupe en un unique point ». On veut donc trouver q, où une carte (resp. un symbole) va correspondre à une droite (resp. un point) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$. Chaque carte possède 8 symboles, donc puisque une droite est un $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ on a $q^1 + 1 = q + 1$ symboles par cartes donc $q = 7$. Le nombre de cartes est donc nécessairement plus petit que le nombre de droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$, qui est $\frac{(7^3-1)(7^2-1)}{(7^2-1)(7-1)} = \frac{7^3-1}{7-1} = 7^2 + 7 + 1 = 57$ (on avait déjà remarqué dans la question précédente que le nombre de droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ est égal à son nombre de points). On pourrait donc rajouter deux cartes !

Exercice 9 (Droite projective réelle)

Justifier que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 (Un peu de topologie)

Soit k un corps et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'on a une bijection $\mathbb{P}^n(k) \simeq k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$.
2. Dans cette union disjointe, que représente $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ pour $\mathbb{P}^n(k)$?

On suppose maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Rappeler pourquoi $\mathbb{P}^n(k)$ hérite sa topologie de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de k^{n+1}.
4. Montrer que ses espaces sont compacts et connexes par arcs.
5. Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'une droite est homéomorphe à un disque ouvert.

1. Un point $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ détermine une unique droite vectorielle, que l'on note $(x_0 : \dots : x_n)$. Cela définit donc une application surjective $\phi_n : k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(k)$. Deux éléments de $(k^n \setminus \{0\}) \times \{0\}$ et $k^n \times \{1\}$ déterminent deux droites distinctes (ils ne sont pas proportionnels !) donc on en déduit que
$$\mathbb{P}^n(k) = \phi_n\big((k^n \setminus \{0\}) \times \{0\}\big) \sqcup \phi_n\big(k^n \times \{1\}\big).$$
Le premier terme envoie $(x_0, \dots, x_{n-1}, 0)$ avec $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in k^n \setminus \{0\}$ sur $(x_0 : \dots : x_{n-1} : 0) = (\phi_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) : 0)$, donc par définition ce terme s'identifie à $\mathbb{P}^{n-1}(k)$. Le second terme envoie $(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)$ avec $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in k^n$ sur $(x_0 : \dots : x_{n-1} : 1)$ donc ce terme s'identifie à k^n (des x_i différents menant à une droite différente). En résumé, on a :
$$\begin{array}{rcl} k^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(k) = k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k) \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{cases} \left(\dfrac{x_0}{x_n} : \dots : \dfrac{x_{n-1}}{x_n} : 1\right), & \text{si } x_n \neq 0, \\ (x_0 : \dots : x_{n-1} : 0), & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$
le premier cas correspondant à k^n et le second à $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.
2. L'hyperplan à l'infini.
3. On a une application $\mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n(k)$ car une droite vectorielle de k^{n+1} possède (au moins) un vecteur unitaire (et un vecteur unitaire détermine une unique droite ; on a $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}(k^{n+1}) = \{(x_0, \dots, x_n) \in k^n : |x_0|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1\}$). La topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$ est la topologie quotien.
4. Il a été vu en cours que $\mathbb{P}^n(k)$ est compact : on montre qu'il est séparé, et ensuite c'est l'image continue d'un compact (la projection canonique est continue par définition de la topologie quotient). Il est connexe par arc par image continue d'un connexe par arcs.

5. On fait une première rédaction. Par la question 1 on a une bijection $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. On va munir l'ensemble de droite d'une topologie pour que cette bijection soit un homéomorphisme. On prend la topologie déterminée de la façon suivante : les ouverts ne contenant pas ∞ sont juste les ouverts de $\mathbb{C}$, et les ouverts contenant ∞ sont les complémentaires (dans $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$) des compacts de $\mathbb{C}$. Remarquons que muni de cette topologie, cet espace est séparé (en fait il est même compact : étant donné un recouvrement d'ouvert, si Ω recouvre ∞ alors Ω^c est un compact de $\mathbb{C}$ et on extrait un sous-recouvrement fini du reste en intersectant les ouverts avec Ω^c).

   On considère maintenant l'application suivante :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \sqcup \{\infty\} \\ (z:1) & \longmapsto & z \\ (1:0) & \longmapsto & \infty \end{array} \right.$$

   Soit $\pi : \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la surjection canonique. On considère un ouvert Ω de $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$.

   - On suppose que $\infty \notin \Omega$. Par définition, l'ouvert Ω est donc un ouvert de $\mathbb{C}$, et donc $f^{-1}(\Omega) = (\Omega : 1)$. Pour savoir si c'est ouvert, il suffit de voir que $\pi^{-1}(\Omega : 1)$ est ouvert (par définition de la topologie sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$). On a :

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\Omega:1) &= \left\{(z,z') \in \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) : (z:z') \in (\Omega:1)\right\} \\ &= \left\{(z,z') \in \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) : z' \neq 0 \text{ et } \frac{z}{z'} \in \Omega\right\}, \end{aligned}$$

     qui est bien un ouvert de $\mathbb{S}(\mathbb{C}^2)$.
   - On suppose $\infty \in \Omega$, de sorte que Ω est le complémentaire dans $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ d'un compact K de $\mathbb{C}$ et donc $\Omega = (\mathbb{C} \setminus K) \sqcup \{\infty\}$. On a donc

$$\begin{aligned} f^{-1}(\Omega) &= f^{-1}\big((\mathbb{C} \setminus K) \sqcup \{\infty\}\big) \\ &= \left\{(z:z') \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : f(z:z') \in (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}\right\} \\ &= \left\{(z:z') \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : \left[z' \neq 0 \text{ et } \frac{z}{z'} \notin K\right] \text{ ou } z' = 0\right\} \\ &= \left\{(z:z') \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : z \notin Kz'\right\}, \end{aligned}$$

     puisque $z \neq 0$ si $z' = 0$. Pour savoir si c'est un ouvert, on applique π^{-1}, et on trouve :

$$\pi^{-1}f^{-1}(\Omega) = \left\{(z,z') \in \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) : z \notin Kz'\right\},$$

     qui est bien ouvert.

   On a donc montré que f est continue. Elle est clairement bijective, donc pour montrer que c'est un homéomorphisme il suffit de montrer qu'elle est fermée. Si $F \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est fermé, il est compact puisque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'est, donc $f(F)$ est compact donc fermé puisque $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ est séparé.

   Il reste maintenant à montrer que $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^2_{\mathbb{R}}$. On a déjà un homéomorphisme $s : \mathbb{S}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{N\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ via la projection stéréographique (avec N le pôle nord). On pose $\tilde{s}(N) := \infty$ et on veut montrer que l'application $\tilde{s} : \mathbb{S}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ qui prolonge s est un homémorphisme. Comme avant, il suffit de montrer qu'elle est continue. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$.

   - Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ alors $\tilde{s}^{-1}(\Omega) = s^{-1}(\Omega)$ est ouvert puisque s est continue.
   - Si $\infty \in \Omega$ alors $\Omega = (\mathbb{C} \setminus K) \sqcup \{\infty\}$ avec K compact de $\mathbb{C}$. Mais alors

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{-1}(\Omega) &= \tilde{s}^{-1}(\mathbb{C} \setminus K) \cup \tilde{s}^{-1}(\infty) \\ &= s^{-1}(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{N\}. \end{aligned}$$

     On sait que $s^{-1}(\mathbb{C} \setminus K)$ est un ouvert de $\mathbb{S}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{N\}$, donc un ouvert de $\mathbb{S}^2_{\mathbb{R}}$ (puisque $\{N\}$ est fermé). Puisque K est borné, on remarque qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_{\mathbb{S}^2_{\mathbb{R}}}(N, \epsilon) \setminus \{N\} \subseteq \Omega'$, ainsi $\tilde{s}^{-1}(\Omega) = \Omega' \cup \{N\}$ est ouvert (c'est une « calotte glacière arctique »).

   On fait maintenant une deuxième rédaction. En identifiant $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$, on considère l'application (qui imite la projection stéréographique) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (x:y) & \longmapsto & \left(\frac{2xy}{|x|^2+|y|^2}, \frac{|x|^2-|y|^2}{|x|^2+|y|^2}\right) \end{array}.$$

   C'est une application bijective continue (d'inverse $(z,t) \mapsto (z : 1-t)$), et par compacité on montre qu'elle est bicontinue.

6. Par la première question on a (informellement, on peut faire comme avant) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus D \simeq \mathbb{R}^2 \simeq$ disque ouvert, où $D \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est une droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Envoi à l'infini

Exercice 11 (Un peu de dessin)

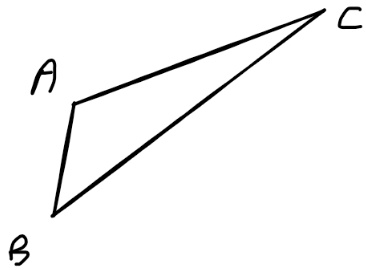
Soit Δ un triangle d'un plan projectif réel. Représenter Δ après avoir envoyé à l'infini :

1. seulement un sommet ;
2. un côté ;
3. une droite rencontrant l'intérieur de Δ.

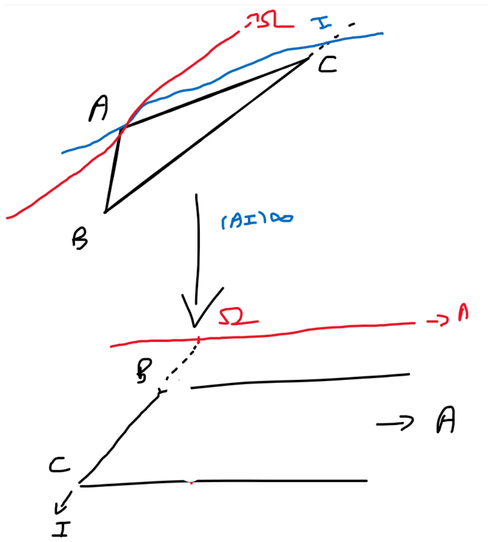
Soit Q un quadrilatère d'un plan projectif réel. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini :

4. seulement un sommet ;
5. seulement un côté ;
6. seulement une diagonale.

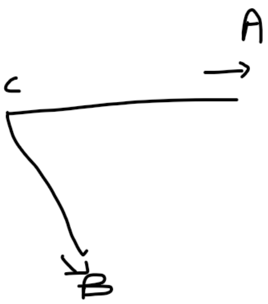
Principe général : les intersections sont conservées, et un point à l'infini est une « direction ». On considère le triangle suivant :



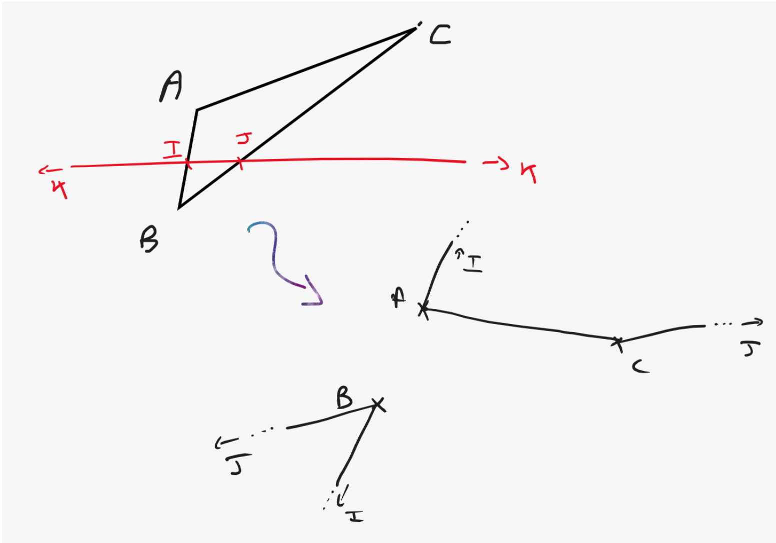
1. En envoyant une droite passant par A à l'infini (la droite ne passant ni par B ni par C), les droites (AB) et (AC) deviennent parallèle. En bleu la droite que l'on envoie à l'infini. En rouge, la parallèle à (BC) passant par A : la direction Ω revient dans le plan affine, elle coupe (BC) en Ω et passe par la direction A.



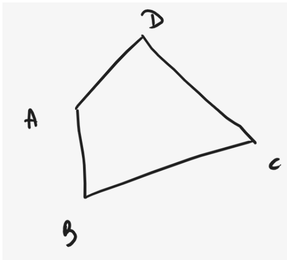
2. En envoyant (AB) à l'infini on obtient



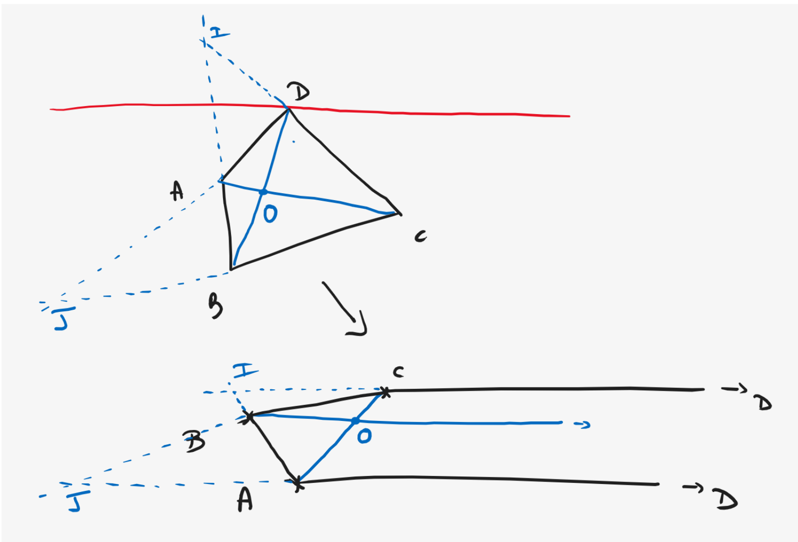
3. En envoyant une droite passant par l'intérieur de Δ, on trouve



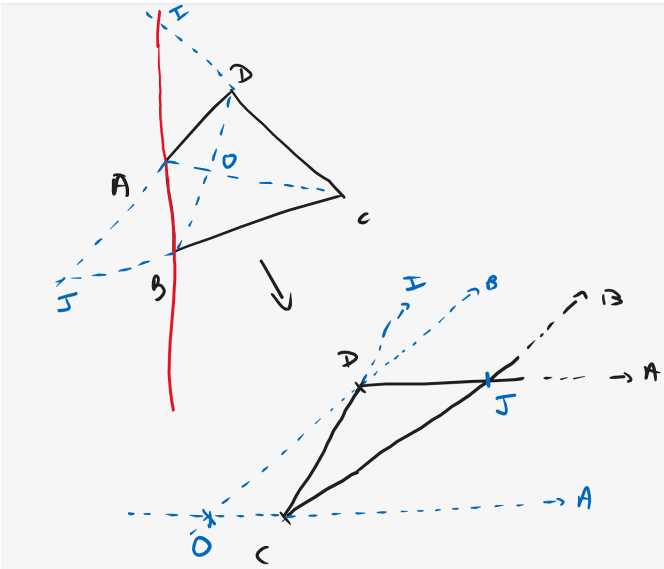
On considère maintenant le quadrilatère suivant :



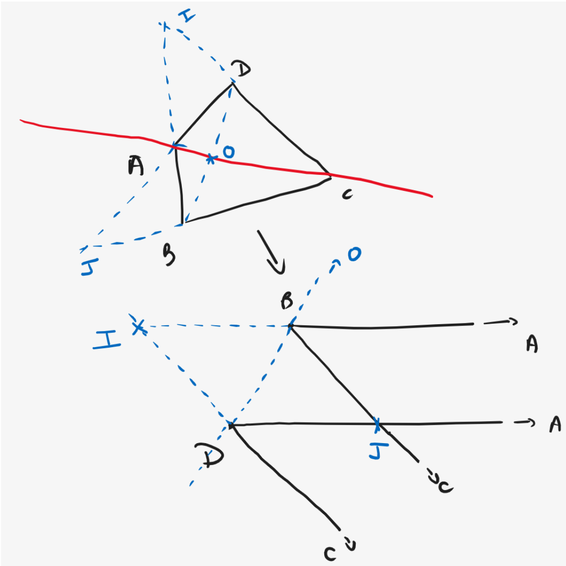
4. On envoie D à l'infini. On place des points A, B, C, on place la direction D (différente de celle de la droite (AB) car I reste dans le plan affine) puis on en déduit O, I, J.



5. On envoie (AB) à l'infini. On place C, D, les directions A, B puis on en déduit les points O, I, J.



6. On envoie (AC) à l'infini. On place B, D, les directions A, C puis on en déduit O, I, J.

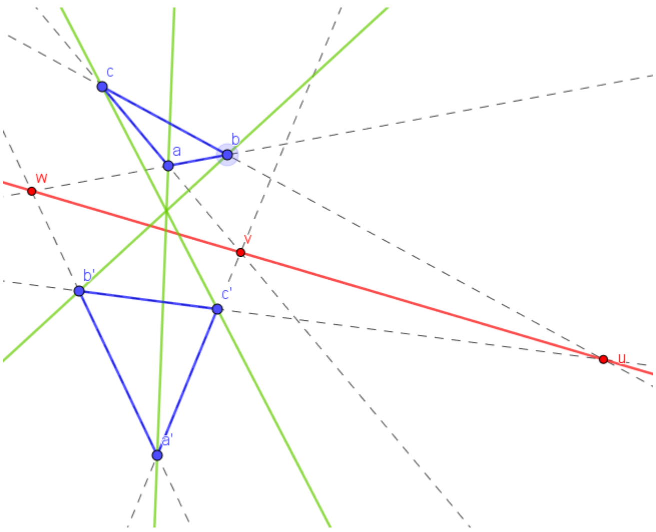


Exercice 12 (Théorème de Desargues)

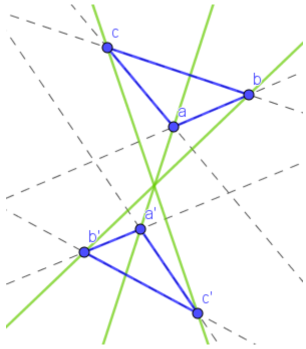
Soit abc et $a'b'c'$ deux triangles. Soient u, v, w les points d'intersection des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que les points u, v, w sont alignés si et seulement si les droites aa', bb' et cc' sont concourantes.

1. Avec GeoGebra (où l'on peut faire bouger les points a, b, c, a', b', c' !) :



2. On suppose que u, v et w sont alignés. On suppose que (aa') et (bb') se coupent en I et montrons que $I \in (cc')$. (Remarque : si (aa') et (bb') ne se coupent pas, alors par le cas que l'on va traiter alors nécessairement aucune de ces deux droites ne coupe (cc').) On envoie la droite (uv) $(\ni w)$ à l'infini, de sorte que $(bc) \parallel (b'c')$ $(\ni u)$, $(ca) \parallel (c'a')$ $(\ni v)$ et $(ab) \parallel (a'b')$ $(\ni w)$. On obtient alors la figure suivante :



Puisque $(ab) \parallel (a'b')$, par le théorème de Thalès on sait que l'homothétie h de centre I qui envoie a sur a' envoie également b sur b'. Puisque $(ac) \parallel (a'c')$, on sait que $h(c) \in (a'c')$ (c'est la réciproque de Thalès, puisque $a' = h(a)$), et de même on a $h(c) \in (b'c')$. Ainsi, nécessairement $h(c) = c'$ et donc $I \in (cc')$.

Réciproquement, on suppose que $(aa'), (bb')$ et (cc') sont concourantes en I et on veut montrer que u, v, w sont alignés.

Méthode 1 : avec des barycentres. Par hypothèse, pour $x \in \{a, b, c\}$ il existe $\lambda_x, \lambda'_x \geqslant 0$ avec $\lambda_x + \lambda'_x = 1$ tels que $I = \mathrm{bar}\big\{(x, \lambda_x), (x', \lambda'_x)\big\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}(bc) \ni\ & \mathrm{bar}\big\{(b, \lambda_b), (c, -\lambda_c)\big\} \\ &= \mathrm{bar}\big\{\underbrace{(b, \lambda_b), (I, -1)}, \underbrace{(I, 1), (c, -\lambda_c)}\big\} \\ &= \mathrm{bar}\big\{(b', -\lambda'_b), (c', \lambda'_c)\big\} \in (b'c')\end{aligned}$$

(on a bien $\lambda_b \neq \lambda_c$ car si $\lambda_b = \lambda_c =: \lambda$ et $\lambda' := 1 - \lambda$ on aurait $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bI} + \overrightarrow{Ic} = -\frac{\lambda'}{\lambda}\overrightarrow{b'I} - \frac{\lambda'}{\lambda}\overrightarrow{Ic'} = -\frac{\lambda'}{\lambda}\overrightarrow{b'c'}$ donc $(bc) \parallel (b'c')$ donc u n'est pas dans le plan affine). donc

$$\mathrm{bar}\big\{(b, \lambda_b), (c, -\lambda_c)\big\} = \mathrm{bar}\big\{(b', -\lambda'_b), (c', \lambda'_c)\big\} = u.$$

De même on montre que

$$\mathrm{bar}\big\{(c, \lambda_c), (a, -\lambda_a)\big\} = \mathrm{bar}\big\{(c', -\lambda'_c), (a', \lambda'_a)\big\} = v,$$

et

$$\mathrm{bar}\big\{(a, \lambda_a), (b, -\lambda_b)\big\} = \mathrm{bar}\big\{(a', -\lambda'_a), (b', \lambda'_b)\big\} = w.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}u &= \mathrm{bar}\big\{(b, \lambda_b), (c, -\lambda_c)\big\} \\ &= \mathrm{bar}\big\{\underbrace{(b, \lambda_b), (a, -\lambda_a)}, \underbrace{(a, \lambda_a), (c, -\lambda_c)}\big\} \\ &= \mathrm{bar}\big\{(w, \lambda_b - \lambda_a), (v, \lambda_b - \lambda_c)\big\} \in (vw),\end{aligned}$$

donc u, v, w sont alignés.

Méthode 2 : en utilisant la dualité.

dans $\mathcal{P}$	dans $\mathcal{P}^*$
points a, b, c	droites a^*, b^*, c^*
triangle de sommets a, b, c	triangle de côtés a^*, b^*, c^*
côté (ab)	sommet $\gamma = a^* \cap b^*$
côté (bc)	sommet $\alpha = b^* \cap c^*$
côté (ca)	sommet $\beta = c^* \cap a^*$
point $u = (bc) \cap (b'c')$	droite $u^* = (\alpha\alpha')$
point $v = (ca) \cap (c'a')$	droite $v^* = (\beta\beta')$
point $w = (ab) \cap (a'b')$	droite $w^* = (\gamma\gamma')$
droite (aa')	point $a^* \cap a'^*$
droite (bb')	point $b^* \cap b'^*$
droite (cc')	point $c^* \cap c'^*$

Dire que $(aa'), (bb'), (cc')$ sont concourantes est équivalent à dire que $a^* \cap a'^*, b^* \cap b'^*, c^* \cap c'^*$ sont alignés. Mais $a^* = (\beta\gamma)$ (ces deux points étant sur a^*), de même $b^* = (\gamma\alpha)$ et $c^* = (\alpha\beta)$ et pareil a'^*, b'^*, c'^*. On a donc :

$$\begin{aligned} a^* \cap a'^* &= (\beta\gamma) \cap (\beta'\gamma'), \\ b^* \cap b'^* &= (\gamma\alpha) \cap (\gamma'\alpha'), \\ c^* \cap c'^* &= (\alpha\beta) \cap (\alpha'\beta'), \end{aligned}$$

donc dire que ces trois points sont alignés revient à appliquer le sens direct du théorème de Desargues dans les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$. On obtient donc que les droites $(\alpha\alpha'), (\beta\beta'), (\gamma\gamma')$ sont concourantes, *i.e.* les droites u^*, v^*, w^* sont concourantes donc les points u, v, w sont alignés.

Exercice 13

Soit d_0, d_1, d, d' 4 droites concourantes en un point m. Soit $o \neq m$ un point de d_1. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites concourantes en o (et distincts de d_1). On note $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$ et $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$. En envoyant une droite à l'infini et en utilisant le birapport, redémontrer le théorème de Thalès.

Homographies

Exercice 14 (Repère projectif d'une droite)

Soit E un k-espace vectoriel et soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. On pose $\phi := \mathbb{P}(f)$.

1. Pour l'application f, que dire d'un point fixe de ϕ ?
2. On suppose que $\dim \mathbb{P}(E) = 1$. Si ϕ admet trois points fixes, montrer que $\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)}$.

Exercice 15 (Points fixes)

On suppose que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soit $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ une homographie.

1. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Montrer que h possède un point fixe.
2. On suppose que $k = \mathbb{R}$ et $\dim E$ est impair. Montrer que h possède un point fixe.
3. Trouver un contre-exemple à la question précédente si $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 16 (Quelques isomorphismes exceptionnels)

Soit E un k-espace vectoriel de dimension au moins 1.

1. Montrer qu'on a des morphismes de groupe $\mathrm{SL}(E) \to \mathrm{GL}(E) \to \mathfrak{S}\big(\mathbb{P}(E)\big)$. Déterminer le noyau.
2. Rappeler les définitions de $\mathrm{PGL}(E)$ et $\mathrm{PSL}(E)$. Sur quel ensemble ces groupes agissent-ils naturellement ? Que dire de l'action ses groupes sur $\mathbb{P}(E)$?
3. Montrer les isomorphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
4. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
5. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.

Il existe d'autres isomorphismes exceptionnels, voir Perrin fin du chapitre IV.

1. La première flèche est l'inclusion, la deuxième est l'action sur les droites vectorielles de E. Un élément $f \in \mathrm{GL}(E)$ stabilise toutes les droites ssi c'est une homothétie, donc le noyau de la deuxième flèche est le centre de $\mathrm{GL}(E) \simeq k^\times$, et de même le noyau de la composée est le centre de $\mathrm{SL}(E) \simeq \mu_n(k)$.
2. Ils agissent sur $\mathbb{P}(E)$, et par ce qui précède on en déduit des injections $\mathrm{PSL}(E), \mathrm{PGL}(E) \hookrightarrow \mathfrak{S}\big(\mathbb{P}(E)\big)$. (On rappelle au passage qu'on a une injection $\mathrm{PSL}(E) \hookrightarrow \mathrm{PGL}(E)$, cf. TD précédent.)
3. On rappelle les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \#\mathrm{GL}_n(q) &= q^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (q^i - 1), \\ \#\mathrm{SL}_n(q) = \#\mathrm{PGL}_n(q) &= \frac{\#\mathrm{GL}_n(q)}{q-1} = q^{n(n-1)/2} \prod_{i=2}^{n} (q^i - 1), \\ \#\mathrm{PGL}_n(q) &= \frac{\#\mathrm{SL}_n(q)}{\mathrm{pgcd}(n, q-1)}, \end{aligned}$$

en particulier pour $n = 2$ le facteur $q^{n(n-1)/2}$ devient q. Ici $q = 2$ donc on a $\#\mathrm{GL}_n(2) = \#\mathrm{SL}_n(2) = \#\mathrm{PSL}_n(2)$ (donc on a des isomorphismes puisqu'on a des applications injectives ou surjectives entre ces groupes) et

$$\#\mathrm{GL}_2(2) = 2(2^2 - 1) = 6.$$

On a $\#\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^2) = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) = q + 1$ donc le morphisme de la question 2 donne un morphisme (injectif) $\mathrm{PSL}_2(2) \hookrightarrow \mathfrak{S}_3$. Par cardinalité, ce morphisme est bijectif.

4. On a $\#\mathbb{P}(\mathbb{F}_3^2) = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3) = 3 + 1 = 4$ donc la question 2 donne une injection $\mathrm{PGL}_2(3) \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$. On a $\#\mathrm{PGL}_2(3) = 3(3^2 - 1) = 3 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$. On obtient l'isomorphisme annoncé par égalité des cardinaux. De même, on a une injection $\mathrm{PSL}_2(3) \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$. Deux rédactions maintenant .
   - on a $\#\mathrm{PSL}_2(3) = \frac{\#\mathrm{PGL}_2(3)}{\mathrm{pgcd}(2,3-1)} = \frac{4!}{2}$ donc l'image de $\mathrm{PSL}_2(3)$ dans $\mathfrak{S}_4$ est d'indice 2 donc c'est $\mathfrak{A}_4$;
   - on en déduit un morphisme (nécessairement injectif !) entre les groupes dérivés $D\big(\mathrm{PSL}_2(3)\big) \hookrightarrow D\big(\mathfrak{S}_4\big)$ c'est-à-dire $\mathrm{PSL}_2(3) \hookrightarrow \mathfrak{A}_4$, qui est un isomorphisme par égalité des cardinaux.
5. On a $\mathrm{pgcd}(2, 4-1) = 1$ donc $\#\mathrm{PSL}_2(4) = \#\mathrm{PGL}_2(4)$ donc $\mathrm{PSL}_2(4) \simeq \mathrm{PGL}_2(4)$ par inclusion. On fait comme dans la question d'avant, en remarquant que $\#\mathrm{PSL}_2(4) = 4(4^2 - 1) = 4 \cdot 15 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = \frac{5!}{2}$.

Exercice 17 (Constructions à la règle)

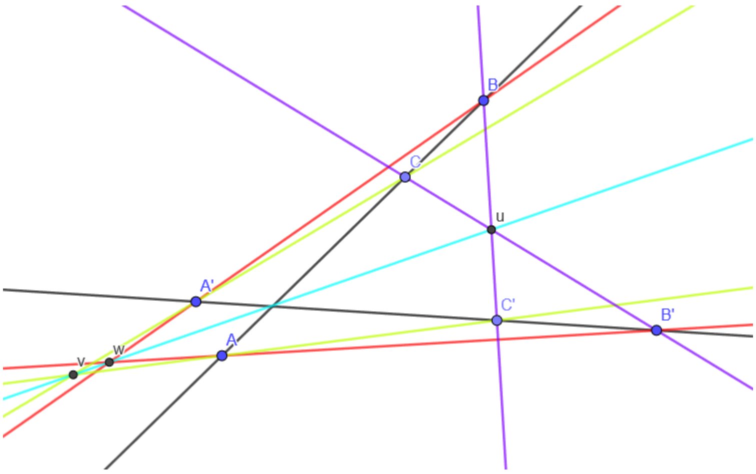
Soient M un point et d, d' deux droites du plan affine.

1. On suppose que d et d' sont parallèles. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (unique) passant par M parallèle à d.
2. On suppose que d et d' sont sécantes en un point N. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (MN) lorsque N est en dehors de la feuille ou du tableau ?

Exercice 18 (Image par une homographie)

Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' 3 points alignés sur une autre droite. Soit φ l'unique homographie qui envoie $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$. Construire $D' = \varphi(D)$ l'image de D un point de la droite (AB). On pourra écrire φ comme un produit de deux perspectives.

On considère la situation suivante.



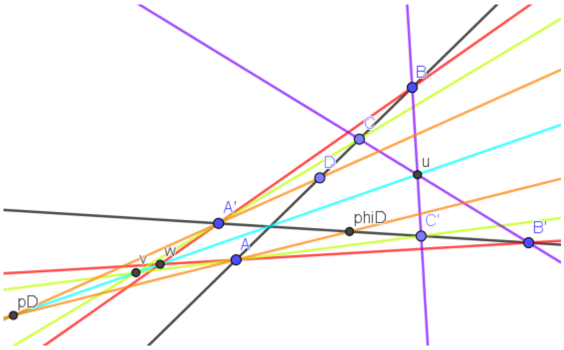
Les points u, v, w (intersection de (BC') et $(B'C)$, (AC') et $(A'C)$, (AB') et $(A'B)$) sont alignés par le théorème de Pappus. On note $d = (AB)$, $d' = (A'B')$ et $\delta = (uv)$ et on considère :

- p la perspective de centre A' qui envoie d sur δ ;
- p' la perspective de centre A qui envoie δ sur d' ;

et on pose $\psi \coloneqq p' \circ p$. On a :

- $\psi(A) = A$;
- $\psi(B) = p' \circ p(B) = p'(w) = B'$;
- $\psi(C) = p' \circ p(C) = p'(v) = C'$.

Ainsi, les homographies $\varphi|_d$ et ψ de la droite d sur d' coïncident sur trois point distincts (qui forment donc un repère projectif) donc coïncident partout. En particulier, on a $\varphi(D) = \psi(D) = p' \circ p(D)$. On a $\{p(D)\} = (A'D) \cap \delta$ et $\{\varphi(D)\} = (p(D)A) \cap d'$:



Exercice 19 (Images des sommets d'un hexagone)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier et soit h une homographie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Étant données les images A', B', D', E' des points A, B, D, E respectivement, construire les images des points restants.
2. Même question en supposant cette fois données les images A', B', C', D' des points A, B, C, D.

Birapport

Exercice 20 (Division harmonique)

Soient A, B, C, D quatre points d'une droite affine réelle en division harmonique. Montrer qu'un et un seul des points C et D se trouve à l'intérieur du segment $[AB]$.

Exercice 21 (Droites concourantes)

Soient (O, A, B, C) et (O, A', B', C') deux quadruplets de points distincts et alignés. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes si et seulement si $[O, A, B, C] = [O, A', B', C']$.

Exercice 22 (Quelques identités)

1. Trouver les homographies de $\mathbb{P}^1(k)$ qui fixent 1 et qui échangent 0 et ∞.
2. En déduire une preuve sans calcul de l'égalité $[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$.
3. Prouver de même les égalités $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice 23 (Moins de monde que prévu !)

On considère l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur les quadruplets et soient a, b, c, d quatre points alignés.

1. Déterminer l'orbite du birapport $[a, b, c, d]$ sous l'action de $\mathfrak{S}_4$.
2. Montrer que le stabilisateur de $[a, b, c, d]$ est en général le sous-groupe $V \subseteq \mathfrak{S}_4$ engendré par les doubles transpositions.

Exercice 24 (Une autre identité)

Soient a, b, m, n, p cinq points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité :

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m] = 1.$$

Droite projective complexe

Exercice 25 (Image de parties du plan)

Déterminer :

1. l'image de $\mathbb{R}^2_{>0}$ par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$;
2. l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par $z \mapsto \frac{2z-i}{2+iz}$;

3. l'image de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{>0} : y < x\}$ par $z \mapsto \frac{z}{z-1}$;
4. l'image de $]0,1[\times\mathbb{R}$ par $z \mapsto \frac{z-1}{z}$ puis par $z \mapsto \frac{z-1}{z-2}$.

Exercice 26 (Théorème des six birapports)

Soient $a, b, c, d, a', b,', c', d'$ 8 points d'une droite projective.

1. Dessiner un cube en disposant les points $a, b, c, d, a', b', c', d'$ afin que les six faces du cubes soient :
$$\{a, b, c', d'\}, \{b, c, a', d'\}, \{c, a, b', d'\}, \{a', b', c, d\}, \{b', c', a, d\}, \{c', a', b, d\}.$$
2. Montrer l'égalité $[a, b, c', d'][b, c, a', d'][c, a, b', d'][a', b', c, d][b', c', a, d][c', a', b, d] = 1$.
3. En déduire le Théorème de Miquel : Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ tels que $\sharp\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{i+1} = 2$, pour $i = 1, \ldots, 4$, on note ses deux points A_i, A'_i. Supposons que les non-prime et les prime sont au bon endroit. Les $A_1, \ldots, A_4$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si les points $A'_1, \ldots, A'_4$ sont cocycliques ou alignés.
4. En déduire le Théorème de Simson : Soit ABC un triangle. Soit M un point du plan euclidien. On note P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les droites $(AB), (BC), (CA)$. Les points P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le circonscrit à ABC.

   Voir l'exercice III.34 du livre *Géométrie* de M. Audin pour une troisième application.