



ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES
-
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

RAPPORT DE STAGE

Stage de Master 2 de mathématiques fondamentales
Mars–Juin 2015

ENSEMBLES BASIQUES CANONIQUEES POUR LES ALGÈBRES DE HECKE VIA LES ALGÈBRES DE CHEREDNIK

Salim ROSTAM

Sous la direction de Maria CHLOUVERAKI
Maître de conférences / Chaire CNRS

Université de Versailles–Saint-Quentin-en-Yvelines
Laboratoire de Mathématiques



Table des matières

Introduction	2
1 Groupes de réflexions	3
1.1 Groupes de réflexions réels	3
1.2 Groupes de réflexions complexes	9
2 Éléments de représentations d'algèbres	12
2.1 Quelques définitions	12
2.2 Formes symétrisantes	13
2.3 Éléments de Schur	14
2.4 Groupes de Grothendieck	15
2.5 Matrices de décomposition	16
3 Algèbres de Hecke	18
3.1 Cas des groupes de Coxeter finis	18
3.2 Cas des groupes de réflexions complexes	22
3.3 Ensembles basiques canoniques	24
4 Ensembles basiques canoniques via les algèbres de Cherednik	26
4.1 Algèbres de Cherednik et foncteur KZ	26
4.2 À la recherche d'ensembles basiques canoniques	27

Introduction

Un théorème de Cayley affirme que tout groupe fini peut être vu comme un sous-groupe du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Ce dernier groupe est engendré par les permutations $s_i := (i, i+1)$ pour $1 \leq i < n$, permutations qui vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, s_i^2 &= 1 \text{ (} s_i \text{ est une involution)} \\ \forall |i-j| > 1, (s_i s_j)^2 &= 1 \text{ (} s_i \text{ et } s_j \text{ commutent)} \\ \forall i, (s_i s_{i+1})^3 &= 1 \end{aligned}$$

Pour étudier le groupe symétrique \mathfrak{S}_n , il peut-être intéressant de le voir comme le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ (où k est un corps) formé des matrices de permutation. Ainsi, lors de l'étude des représentations de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ (note¹) on a le résultat suivant : si B désigne le sous-groupe de Borel (matrices triangulaires supérieures) et $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1})$ est la représentation induite par la représentation triviale alors $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[G]}(\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}))$ est isomorphe à l'algèbre de

1. Les représentations de $\mathrm{GL}_n(k)$ avec k de caractéristique nulle sont bien comprises depuis Frobenius.

Hecke $\mathcal{H}(\mathfrak{S}_n, \{s_i\}_{1 \leq i < n}, \{q, q-1\})$, avec les notations de la Définition 3.1.1 et de l'Exemple 1.1.13 (voir [GP, Corollary 8.4.7] pour plus de détails). Le point intéressant est que l'on dispose d'outils pour étudier ces algèbres de Hecke, notamment les *ensembles basiques canoniques* (Section 3.3) dont nous allons parler dans ce mémoire.

Le fait d'avoir un ensemble basique implique qu'une certaine matrice, la *matrice de décomposition* (Définition 2.5.3), est triangulaire inférieure : cette matrice nous donne des renseignements sur les modules simples de notre algèbre de Hecke. C'est cette même matrice de décomposition qui apparaît dans la conjecture de James (voir par exemple [GJ, Conjecture 3.7.2]), qui stipule que la matrice de décomposition relative à une représentation modulaire de \mathfrak{S}_n (i.e. un $\mathbb{F}_q[\mathfrak{S}_n]$ -module) est égale à la matrice de décomposition pour l'algèbre de Hecke toujours pour \mathfrak{S}_n mais où le corps de base est cette fois \mathbb{C} . Ainsi, en comprenant ce dernier problème, en caractéristique nulle, on obtient des informations sur le problème initial, en caractéristique positive.

Revenons à notre groupe symétrique \mathfrak{S}_n , que l'on regarde cette fois sous un angle plus géométrique : on donnera dans la Section 1.1 la définition d'un *groupe de réflexions réel*, dont le groupe symétrique est un exemple (Exemple 1.1.6) (note ²). Cette notion de groupe de réflexions réel coïncide avec celle d'un groupe de Coxeter fini (Définition 1.1.9), qui est le pendant présentation de groupes par générateurs et relations. Comme pour le groupe symétrique, on peut aussi associer à ces nouveaux objets des algèbres de Hecke et chercher des ensembles basiques canoniques.

C'est l'aspect groupe de réflexions réel qui va pouvoir être le plus facilement généralisé : on verra lors de la Définition 1.2.3 la notion de groupe de réflexions *complexe*. Cette fois-ci, l'étude des algèbres de Hecke associées va se révéler plus compliquée : le but de ce mémoire est de donner une preuve de l'existence d'ensembles basiques canoniques pour certains groupes de réflexions complexes (Section 4.2) en utilisant le foncteur KZ provenant des algèbres de Cherednik (Section 4.1) ; nous reprendrons la preuve combinatoire de [CGG, Theorem 5.7] avec une once de généralisation.

1 Groupes de réflexions

1.1 Groupes de réflexions réels

1.1.1 Définitions

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.1.1. Une *réflexion* de V est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(V)$ de V différent de l'identité, d'ordre fini et qui fixe un hyperplan.

2. Des exemples particuliers et particulièrement importants de groupes de réflexions réels sont les groupes de Weyl (groupes de réflexions constitués de matrices à coefficients rationnels), voir par exemple [BMM].

Exemple 1.1.2. Si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est euclidien, l'endomorphisme donné par $u_\alpha(x) := x - \frac{2\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$ est une réflexion d'hyperplan $H_\alpha := \alpha^\perp$.

Remarque 1.1.3. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ une réflexion. Par définition l'endomorphisme u est d'ordre fini : ainsi, la matrice associée à u est \mathbb{C} -diagonalisable, de valeurs propres des racines (complexes) de l'unité. Comme 1 est déjà valeur propre de multiplicité au moins $m := (\dim V) - 1$, soit $u = \text{id}_V$ soit -1 est valeur propre de u . Comme $u \neq \text{id}_V$ par définition, on est dans le deuxième cas et la matrice de u dans une base adaptée à $\mathbb{R}v \oplus H$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, où v est un vecteur propre de u associé à la valeur propre -1 .

D'après la Remarque 1.1.3, on a la propriété suivante.

Proposition 1.1.4. *Une réflexion est d'ordre 2.*

Définition 1.1.5. Un groupe de réflexions réel est un sous-groupe fini de $\text{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

Exemple 1.1.6. Le plongement classique $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ par les matrices de permutation (dont on a parlé durant l'introduction) permet de voir \mathfrak{S}_n comme un groupe de réflexions réel, une transposition (i, j) correspondant à la symétrie orthogonale d'hyperplan $(e_i - e_j)^\perp$ où (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n .

Exemple 1.1.7. Le groupe diédral $D_n = \langle r, s \mid r^n, s^2, rs(sr^{-1})^{-1} \rangle$ (groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés) est un groupe de réflexions réel. En effet, c'est un sous-groupe fini (de cardinal $2n$) de $\text{GL}(\mathbb{R}^2)$; de plus, on constate que $(rs)^2 = 1$ donc rs est diagonalisable de valeurs propres ± 1 . Comme $\det(rs) = -1$ on obtient que l'ensemble des valeurs propres est exactement $\{-1, 1\}$ donc rs est une réflexion. Comme $r = (rs)s$ on en déduit que D_n est engendré par des réflexions.

Remarque 1.1.8. Un groupe $G \subseteq \text{GL}(V)$ peut-être engendré par un nombre fini de réflexions mais être infini. Par exemple, si l'on considère $H, H' \subseteq \mathbb{R}^2$ deux droites formant un angle multiple irrationnel de π et s_H (respectivement $s_{H'}$) la réflexion de \mathbb{R}^2 par rapport à l'hyperplan H (resp. H'), le groupe $G := \langle s_H, s_{H'} \rangle \subseteq \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ est infini.

1.1.2 Groupes de Coxeter

Définition 1.1.9. On dit qu'un groupe W est un *groupe de Coxeter*³ si W admet une présentation de la forme

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{i,j}} \rangle$$

3. Harold Scott MacDonald COXETER, 1907 (Londres, Angleterre) - 2003 (Toronto, Canada).

avec :

$$m_{i,j} = m_{j,i} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\} \text{ si } i \neq j$$

$$m_{i,i} = 1$$

où une relation $(s_i s_j)^\infty$ signifie qu'il n'y a pas de relation entre s_i et s_j . Si S désigne l'ensemble des générateurs s_i , on dit que (W, S) est un *système de Coxeter*.

Remarque 1.1.10. On notera parfois m_{s_i, s_j} au lieu de $m_{i,j}$.

Remarque 1.1.11. Si (W, S) est un système de Coxeter, pour $s \in S$ on a $m_{s,s} = 1$ donc $s^2 = 1$. Ainsi, si t est un élément de S tel que $m_{s,t} = 2$, la relation $(st)^2 = 1$ est équivalente à $st = ts$ i.e. t et s commutent.

Exemple 1.1.12. Le groupe diédral est un groupe de Coxeter : en effet, d'après l'Exemple 1.1.7 en posant $s' = rs$ on a $D_n = \langle s, s' \mid s^2, s'^2, (s's)^n \rangle$. On représente sur la Figure 1 le cas $n = 5$, où s est la réflexion par rapport à l'axe des abscisses et r la rotation d'angle $\theta := \frac{2\pi}{5}$.

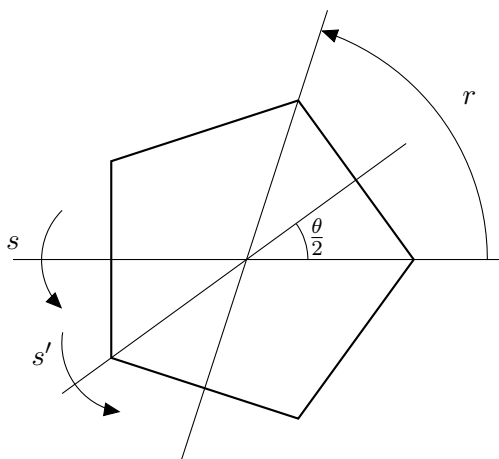


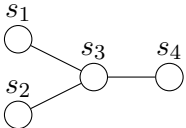
FIGURE 1 – $D_5 = \langle r, s \rangle = \langle s, s' \rangle$

Exemple 1.1.13. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n est un groupe de Coxeter : avec $s_i = (i, i + 1)$ pour $1 \leq i \leq n - 1$ et $m_{i,j} = \begin{cases} 3 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 2 & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}$ (et $m_{i,i} = 1$) on obtient une bonne présentation ; la démonstration n'est pas immédiate, on peut par exemple utiliser la démonstration du Théorème 1.1.20 (cf. aussi [Bou, Ch. IV, §1, n° 3, Exemple 2]).

Définition 1.1.14. Soit (W, S) un système de Coxeter. Le *graphe de Coxeter* associé à W est le graphe de sommets les éléments de S , deux éléments $s, s' \in S$ étant reliés par une arête étiquetée par $m_{s,s'}$ si $m_{s,s'} \geq 3$ (on omettra l'étiquetage s'il vaut 3).

Exemple 1.1.15. Le graphe $\circ \overset{n}{\text{---}} \circ$ représente le groupe diédral D_n .

Exemple 1.1.16. Le graphe $\circ \text{---} \circ \text{---} \circ$ représente le groupe symétrique \mathfrak{S}_4 .

Exemple 1.1.17. Le graphe  représente le groupe engendré

par s_1, s_2, s_3, s_4 avec comme relations :

- $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = s_4^2 = 1$;
- $(s_1 s_2)^2 = (s_1 s_4)^2 = (s_2 s_4)^2 = 1$;
- $(s_1 s_3)^3 = (s_2 s_3)^3 = (s_3 s_4)^3 = 1$.

Remarque 1.1.18. On peut voir dans [Hum, Section 2.7] une classification des graphes de Coxeter finis connexes de type positif.

Le lemme suivant est plus dur à démontrer qu'il n'y paraît ; la démonstration proposée par exemple dans [Hum, Proposition 5.3] en fait un premier pas vers le Théorème 1.1.20 (que l'on trouve également dans [Hum]).

Lemme 1.1.19. *Si (W, S) est un système de Coxeter, l'ordre de st pour $s, t \in S$ est exactement $m_{s,t}$.*

À propos de la démonstration. On construit un morphisme $\sigma : W \rightarrow \text{GL}(V)$ qui envoie W dans le groupe orthogonal de la forme bilinéaire symétrique B définie sur V par $B(\alpha_s, \alpha_{s'}) := -\cos \frac{\pi}{m_{s,s'}}$ où V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de base $\{\alpha_s\}_{s \in S}$. □

Théorème 1.1.20. — *Si W est un groupe de réflexions réel alors W est un groupe de Coxeter (fini).*

- *Si W est un groupe de Coxeter fini alors il existe un espace euclidien V tel que W est isomorphe à un groupe de réflexions réel de V .*

Remarque 1.1.21. D'après le Théorème 1.1.20 et la Remarque 1.1.18, on dispose d'une classification des groupes de réflexions réels.

1.1.3 Fonction de longueur

Soit (W, S) un système de Coxeter.

Définition 1.1.22. — Pour $w \in W$, on définit sa *longueur* $\ell(w)$ comme le plus petit entier $r \in \mathbb{N}$ tel que w s'écrit $s_1 \cdots s_r$ pour $s_i \in S$.

- Si $w \in W$ s'écrit $w = s_1 \cdots s_r$ avec $r = \ell(w)$, on dit que $s_1 \cdots s_r$ est une expression *réduite* de w .

Remarquons que $w \in W$ est de longueur 1 si et seulement si $w \in S$. De plus, une expression réduite n'est pas nécessairement unique, comme le montre le contre-exemple dans \mathfrak{S}_3 donné par $(1, 3) = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$

(notations de l'Exemple 1.1.13). En revanche, deux expressions réduites d'un même mot seront toujours constituées des mêmes générateurs (voir par exemple [GP, Corollary 1.2.3]).

Énonçons un petit lemme (voir par exemple [GP, Remark 1.1.5]).

Lemme 1.1.23. *Pour $w \in W$ et $s \in S$ on a $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ et $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$.*

Avant de continuer, introduisons la notation suivante : si a et b sont des éléments d'un monoïde et si $m \in \mathbb{N}^*$, on note

$$B(a, b; m) := \underbrace{ababa \dots}_{m \text{ termes}}$$

(la lettre B vient de l'anglais « *braid* » qui signifie « tresse »). En particulier, comme dans la Remarque 1.1.11, si s et t sont deux générateurs d'un groupe de Coxeter avec $m_{s,t} \neq \infty$ on a $s^2 = t^2 = 1$ donc les relations $(st)^{m_{s,t}} = 1$ et $B(s, t; m_{s,t}) = B(t, s; m_{s,t})$ sont équivalentes.

Les notions de longueur et de mot réduit se révèlent très fécondes. Voici par exemple un théorème très important (voir par exemple [GP, Theorem 1.2.2]), où l'on retrouve une égalité de tresses comme ci-avant.

Théorème 1.1.24 (Matsumoto⁴). *Soient (\mathcal{M}, \star) un monoïde et $f : S \rightarrow \mathcal{M}$ une application telle que :*

$$\forall s \neq t \in S, B(f(s), f(t); m_{s,t}) = B(f(t), f(s); m_{s,t}) \quad (1.1.1)$$

Il existe une unique application $F : W \rightarrow \mathcal{M}$ vérifiant $F(w) = f(s_1) \star \dots \star f(s_n)$ pour tout mot $w = s_1 \dots s_n$ réduit ($s_i \in S$).

Le théorème qui suit (cf. par exemple [GP, Theorem 1.2.5]) peut être obtenu dans la continuité du théorème de Matsumoto ; en particulier, en enlevant à un mot des paires d'éléments de S on aboutit nécessairement sur une expression réduite.

Théorème 1.1.25. *Soit $w = s_1 \dots s_r \in W$ avec $s_i \in S$ et $r \geq 2$. Si $\ell(w) < r$, il existe des indices $i < j$ tels que $w = s_1 \dots \widehat{s}_i \dots \widehat{s}_j \dots s_r$ (ou le chapeau signifie l'omission).*

Pour finir, énonçons une succession de petits lemmes relatifs aux tresses.

Lemme 1.1.26. *Pour $s, t \in S$ et $1 \leq m \leq 2m_{s,t} - 1$ on a $B(s, t; m) \neq 1$.*

Démonstration. Supposons que $B(s, t; m) = 1$; on distingue les cas selon la parité de m . Si $m = 2n$ on obtient $(st)^n = 1$ ce qui est absurde puisque st est d'ordre $m_{s,t} > n$ (Lemme 1.1.19). Si $m = 2n + 1$ on obtient $(st)^n s = 1$ donc en conjuguant par s on a $t(st)^{n-1} = 1$ en conjuguant par t on a $s(ts)^{n-2} = 1$ donc ... donc on aboutit soit sur $s = 1$ soit sur $t = 1$, ce qui est absurde (on aurait pu dans ce cas conclure plus directement avec la notion de signature, cf. [GP, Remark 1.1.5]). \square

4. Hideya MATSUMOTO.

Lemme 1.1.27. *Pour $s, t \in S$ et $1 \leq m \leq m_{s,t}$ l'expression $B(s, t; m)$ est réduite.*

Démonstration. En effet, par le Théorème 1.1.25 une expression réduite de $B(s, t; m)$ est nécessairement de la forme $B(s, t; m')$ ou $B(t, s; m'')$ avec $m', m'' \leq m$ (deux s ou deux t à côté s'annulant).

- Dans le premier cas, en écrivant que $B(s, t; m)$ est égal à sa forme réduite on obtient une tresse nulle de s et t de longueur $m - m'$ donc par le Lemme 1.1.26 on a nécessairement $m' = m$ i.e. $B(s, t; m) = B(s, t; m')$ est réduite.
- En faisant la même chose pour le deuxième cas on obtient une tresse nulle de s et t de longueur $m + m''$ donc par le même lemme on a nécessairement $m + m'' = 2m_{s,t}$. Comme $m'' \leq m \leq m_{s,t}$ on a $m = m'' = m_{s,t}$ donc $B(s, t; m) = B(s, t; m_{s,t}) = B(t, s; m_{s,t}) = B(t, s; m'')$ est réduite.

□

1.1.4 Fonctions de poids

On va introduire dans cette section des fonctions qui généralisent la fonction longueur définie sur un groupe de Coxeter.

Lemme 1.1.28. *Soit $L : S \rightarrow \mathbb{N}$ une application. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\forall s, t \in S, [m_{s,t} \text{ impair} \implies L(s) = L(t)]$
- (ii) $\forall s, t \in S, [s \text{ et } t \text{ sont conjugués dans } W \implies L(s) = L(t)]$

Démonstration. (ii) \implies (i) Il suffit de montrer la proposition suivante :

$$\forall s, t \in S, [m_{s,t} \text{ impair} \implies s \text{ et } t \text{ sont conjugués}] \quad (1.1.2)$$

Cette dernière proposition est vraie car $B(s, t; m_{s,t}) = B(t, s; m_{s,t})$ donc si $m_{s,t} = 2n + 1$ on obtient $s(ts)^n = B(t, s; 2n + 1)$ donc $s = B(t, s; 2n + 1)(ts)^{-n} = (ts)^n t (ts)^{-n}$ i.e. s et t sont conjugués.

- (i) \implies (ii) Soient $s, t \in S$ tels que s et t sont conjugués. D'après [Bou, Ch. IV, Proposition 3], on sait qu'il existe une suite s_1, \dots, s_n d'éléments de S avec $s_1 = s$ et $s_n = t$, vérifiant :

$$\forall i = 1, \dots, n - 1, \text{ l'ordre de } s_i s_{i+1} \text{ est impair}$$

Par le Lemme 1.1.19 et par (i) on a donc $L(s_i) = L(s_{i+1})$ pour tout $i = 1, \dots, n - 1$ et on obtient $L(s) = L(t)$.

□

Remarque 1.1.29. On n'a pas l'implication réciproque de (1.1.2), à savoir s et t sont conjugués $\implies m_{s,t}$ impair. En effet, avec $(W, S) = (\mathfrak{S}_4, \{s_1, s_2, s_3\})$ (notations de l'Exemple 1.1.13) les générateurs s_1 et s_3 sont conjugués mais $m_{1,3} = 2$ est pair. En revanche, la suite s_1, s_2, s_3 est bien en accord avec [Bou, Ch. 4 Proposition 3] que l'on a utilisée.

Définition 1.1.30. On dit que $L : W \rightarrow \mathbb{N}$ est un *poids* si $L(ww') = L(w) + L(w')$ quand $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$.

On obtient alors l'énoncé suivant.

Proposition 1.1.31. *Un poids $L : W \rightarrow \mathbb{N}$ est déterminé uniquement par les $L(s)$ pour $s \in S$. De plus, étant donnée une application $L : S \rightarrow \mathbb{N}$ les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) L se prolonge en un poids sur W ;
- (ii) $L(s) = L(t)$ pour tous $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t}$ impair ;
- (iii) $L(s) = L(t)$ pour tous $s \neq t \in S$ conjugués dans W .

Démonstration. La première partie est claire : si $w = s_1 \cdots s_n$ est réduit ($s_i \in S$) alors $L(w) = L(s_1) + \cdots + L(s_n)$.

En ce qui concerne les équivalences, remarquons tout d'abord que (ii) \Leftrightarrow (iii) résulte directement du Lemme 1.1.28 ; il suffit donc de montrer (i) \Leftrightarrow (ii).

Montrons (i) \Rightarrow (ii). Soit L un poids et soient $s \neq t \in S$ tels que $m := m_{s,t}$ est impair. En écrivant $m = 2m' + 1$, on a $B(s, t; 2m' + 1) = B(t, s; 2m' + 1)$ donc d'après le Lemme 1.1.27 on a bien $m'(L(s) + L(t)) + L(s) = m'(L(t) + L(s)) + L(t)$ donc $L(s) = L(t)$.

Réciproquement, si la condition $L(s) = L(t)$ pour $s \neq t \in S$ avec $m_{s,t}$ impair est vérifiée, l'existence du prolongement de L en un poids sur W découle du théorème de Matsumoto appliqué avec $(\mathcal{M}, \star) = (\mathbb{N}, +)$ et $f(s) := L(s)$. En particulier, comme \mathbb{Z} est commutatif l'hypothèse (1.1.1) du théorème de Matsumoto est automatiquement vérifiée si $m_{s,t}$ est pair et est équivalente à $f(s) = f(t)$ si $m_{s,t}$ est impair *i.e.* $L(s) = L(t)$: c'est justement ce que l'on suppose ! Ainsi, il existe $F : W \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $F(s_1 \cdots s_n) = L(s_1) + \cdots + L(s_n)$ pour toute expression $s_1 \cdots s_n$ réduite ($s_i \in S$). Si maintenant $w, w' \in W$ sont tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$ avec $w = s_1 \cdots s_n$ ($s_i \in S$) et $w' = s'_1 \cdots s'_n$ ($s'_i \in S$) réduites, alors $ww' = s_1 \cdots s_n s'_1 \cdots s'_n$ est réduite (car cette expression est de la bonne longueur) donc $F(ww') = L(s_1) + \cdots + L(s_n) + L(s'_1) + \cdots + L(s'_n) = F(w) + F(w')$. Ainsi, l'application F est un poids sur W qui prolonge L . \square

1.2 Groupes de réflexions complexes

1.2.1 Définitions

Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.2.1. Une *pseudo-réflexion* de V est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(V)$ de V différent de l'identité, d'ordre fini et qui fixe un hyperplan. On dit qu'une pseudo-réflexion de V est une *réflexion complexe*.

Remarque 1.2.2. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$ une pseudo-réflexion. Par définition l'endomorphisme u est d'ordre fini d : ainsi u est diagonalisable. Comme 1 est déjà valeur propre de multiplicité au moins $m := (\dim V) - 1$, soit $u = \text{id}_V$ soit il existe $\zeta \in \mu_d(\mathbb{C}) \setminus \{1\}$ racine complexe $d^{\text{ième}}$ de l'unité valeur propre de u . Comme $u \neq \text{id}_V$ par définition, on est dans le deuxième cas et la matrice de u dans une base adaptée à $\mathbb{C}v \oplus H$ est $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, où v est un vecteur propre de u associé à la valeur propre ζ .

En particulier, les définitions de réflexion complexe et de réflexion (réelle) coïncident mais une réflexion complexe n'est pas nécessairement d'ordre 2.

Définition 1.2.3. Un *groupe de réflexions complexe* est un sous-groupe fini de $\text{GL}(V)$ engendré par des pseudo-réflexions.

Remarque 1.2.4. Si $W \subseteq \text{GL}(V)$ est un groupe de réflexions complexe, on dira parfois que le couple (V, W) est un groupe de réflexions complexe.

Remarque 1.2.5. Soit $G \subseteq \text{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexe ; comme G est fini, on peut trouver un produit scalaire sur V qui est G -invariant. Avec ce produit scalaire, pour chaque $u \in G$ il existe un élément $\alpha_u \in V$ tel que l'hyperplan α_u^\perp est stable par u (on est alors dans un cas analogue à celui de l'Exemple 1.1.2). On supposera désormais que l'on munit toujours V d'un tel produit scalaire G -invariant.

Remarque 1.2.6. On peut voir dans [Be, Theorem 0.1] un résultat analogue au Théorème 1.1.20, où l'on voit que tout groupe de réflexion complexe possède une présentation semblable à celle d'un groupe de Coxeter. En revanche, le résultat important du Lemme 1.1.23 n'est plus assuré : par exemple, avec le groupe de réflexions complexe $\mu_d(\mathbb{C}) = \langle \zeta \rangle$ pour $d > 2$, on a $\ell(\zeta^{-1}) = d - 1$ mais $\ell(\zeta\zeta^{-1}) = 0 \neq \ell(\zeta^{-1}) \pm 1$.

1.2.2 Classification

Définition 1.2.7. Soient $d, e, n \in \mathbb{N}^*$. On définit le groupe $G(de, e, n)$ comme l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mu_{de}(\mathbb{C})$ avec un unique coefficient non nul par ligne et par colonne, telles que le produit des coefficients non nuls est un élément de $\mu_d(\mathbb{C})$.

Remarque 1.2.8. Les $G(de, e, n)$ sont bien des groupes finis, la stabilité par multiplication provenant de $P^\sigma D = D^\sigma P^\sigma$ pour D une matrice diagonale et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (car la matrice $P^\sigma D (P^\sigma)^{-1}$ reste diagonale et possède les mêmes coefficients que D).

Remarque 1.2.9. Le groupe $G(1, 1, n)$ n'est rien d'autre que le sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de permutation ; il est donc isomorphe à \mathfrak{S}_n .

Remarque 1.2.10. Le groupe $G(d, 1, n)$ est le groupe des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mu_d(\mathbb{C})$ avec un unique coefficient non nul par ligne et par colonne.

Lemme 1.2.11. *Les groupes $G(d, 1, n)$ sont des groupes de réflexions complexes.*

Démonstration. Si ζ est une racine primitive $d^{\text{ième}}$ de l'unité alors $G(d, 1, n)$ est engendré par $\text{diag}(1, \dots, 1, \zeta)$ (qui est bien une réflexion complexe) et par les matrices de permutation associées à $(i, i + 1)$ (on a vu dans l'Exemple 1.1.6 qu'elles sont bien des réflexions). \square

Proposition 1.2.12. *Les groupes $G(de, e, n)$ sont des groupes de réflexions complexes.*

Démonstration. On a $G(de, e, n) = G(de, 1, n)G(de, de, n)$ donc compte-tenu du lemme précédent il suffit de montrer que $G(de, de, n)$ est un groupe de réflexions complexe. Pour cela, on remarque que $G(de, de, n)$ est généré par les matrices de permutation associées à $(i, i + 1)$ ainsi que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \zeta & & \\ \zeta^{-1} & 0 & & \\ & & & \\ & & & I_{n-2} \end{pmatrix}$ où ζ est une racine primitive $de^{\text{ième}}$ de l'unité ; cette dernière matrice est bien une réflexion complexe car, si (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{C}^n , l'endomorphisme associé fixe tous les éléments de l'hyperplan engendré par $\zeta e_1 + e_2$ et e_2, \dots, e_n . \square

La classification concerne les groupes de réflexions complexes (V, W) tels que les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par l'action de W sont $\{0\}$ et V , autrement dit V est une représentation irréductible de W ; on dit que (V, W) est un groupe de réflexions complexe irréductible. Tout groupe de réflexions complexes est un produit direct de groupes de réflexions complexes irréductibles (voir par exemple [Br88, Proposition 1.13]) et on a le résultat de classification suivant, dû à Shephard et Todd (cf. [ST]).

Théorème 1.2.13. *Soit (V, W) un groupe de réflexions complexe irréductible. L'une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

- *il existe $d, e, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $W \simeq G(de, e, n)$;*
- *le groupe W est isomorphe à l'un des 34 groupes exceptionnels G_n (pour $n = 4, \dots, 37$).*

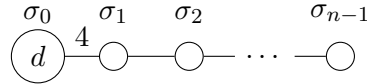
Retournons maintenant au cas du groupe $G(d, 1, n)$; donnons-en une présentation ([AK, Proposition 2.1]).

Théorème 1.2.14. *Le groupe $G(d, 1, n)$ admet une présentation avec les générateurs $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$ et les relations suivantes :*

- $\sigma_i^2 = 1$ pour $i = 1, \dots, n - 1$;
- $\sigma_0^d = 1$;
- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i - j| > 1$;

- $\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$ pour $i = 1 \dots n - 2$;
- $\sigma_0\sigma_1\sigma_0\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0\sigma_1\sigma_0$;

(les trois dernières étant des relations dites de « tresses ») résumées dans le diagramme suivant :



Remarque 1.2.15. Le diagramme précédent est une généralisation des diagrammes de Coxeter : en effet, on a déjà vu que si a et b sont des éléments d'ordre 2 alors $B(a, b; m) = B(b, a; m) \iff (ab)^m = 1$. De plus, les nœuds sont étiquetés par l'ordre de l'élément en question, étiquetage que l'on omet si l'ordre est égal à 2.

2 Éléments de représentations d'algèbres

2.1 Quelques définitions

Cette section est tirée du paragraphe introductif de [GP, Chapter 7], dont les résultats sont tirés de [CR].

Définition 2.1.1. Une *représentation* d'une \mathcal{O} -algèbre A (avec \mathcal{O} anneau commutatif unitaire) est un morphisme $\rho : A \rightarrow \text{End}(V)$ de \mathcal{O} -algèbres où V est un \mathcal{O} -module de type fini.

Remarque 2.1.2. De façon équivalente, une représentation de A est la donnée d'un A -module (à gauche), de type fini si l'algèbre est de dimension finie.

Les notions de caractère, représentation irréductible, ... sont les mêmes que celles des représentations de groupes. On note $\text{Irr}(A)$ l'ensemble des représentations irréductibles (à isomorphisme près) de A .

Définition 2.1.3. On dit qu'une algèbre est *simple* si elle ne possède pas d'idéal bilatère propre différent de $\{0\}$.

Exemple 2.1.4. L'algèbre des matrices carrées à coefficients dans un corps commutatif est simple (ce résultat est connu sous le nom de théorème de Burnside).

Remarque 2.1.5. En réalité, toute algèbre simple (de dimension finie) est isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans une algèbre à divisions (théorème de Wedderburn).

Remarque 2.1.6. Plus généralement, on dit qu'un module est simple s'il ne possède pas de sous-module propre différent de $\{0\}$. Une représentation est irréductible si et seulement si le module associé est simple.

Définition 2.1.7. On dit qu'une algèbre est *semi-simple* si elle est somme directe d'algèbres simples.

Remarque 2.1.8. Si l'algèbre est de dimension finie, c'est équivalent à ce que le radical de Jacobson (l'intersection des idéaux maximaux) soit nul.

Remarque 2.1.9. Si W est un groupe fini, le théorème de Maschke énonce que $k[W]$ est semi-simple pour tout corps k dont la caractéristique ne divise pas l'ordre de W .

Définition 2.1.10. Une k -algèbre A est *déployée* (en anglais « *split* ») si pour tout A -module simple V on a $\text{End}_A(V) \simeq k$.

Remarque 2.1.11. Si k est algébriquement clos, toute k -algèbre est déployée.

2.2 Formes symétrisantes

Soit maintenant A une \mathcal{O} -algèbre où \mathcal{O} est un anneau, commutatif unitaire. On suit ce qui est exposé dans [Ch09, Section 2.2].

Définition 2.2.1. Une fonction *trace* sur A est une application \mathcal{O} -linéaire $t : A \rightarrow \mathcal{O}$ vérifiant $t(ab) = t(ba)$ pour tout $a, b \in A$.

Exemple 2.2.2. Un caractère est une fonction trace.

Exemple 2.2.3. Avec $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Z}[G]$ où G est un groupe fini, l'application $t : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$t : \sum_{g \in G} a_g g \longmapsto a_1$$

(où $a_g \in \mathbb{Z} \forall g \in G$) est une fonction trace, appelée fonction trace « canonique » sur A . En effet, $t(gg') = t(g'g) \left(= \begin{cases} 1 & \text{si } g' = g^{-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right)$ et on conclut grâce à la linéarité de t .

Définition 2.2.4. Une fonction trace $t : A \rightarrow \mathcal{O}$ est appelée *forme symétrisante* si le morphisme :

$$\hat{t} : \begin{array}{l} A \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(A, \mathcal{O}) \\ a \longmapsto \left(x \mapsto \hat{t}(a)(x) := t(ax) \right) \end{array}$$

est un isomorphisme de A -modules. Dans ce cas on dit que l'algèbre A est *symétrique*.

Exemple 2.2.5. La fonction trace de l'Exemple 2.2.3 est une forme symétrisante car sa matrice dans la base $\{g\}_{g \in G}$ est inversible dans $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ (c'est une matrice de permutation). On dit que c'est la forme symétrisante canonique sur G .

Définition 2.2.6. Si $\tau : A \rightarrow \mathcal{O}$ est une forme linéaire, on note $\tau^\vee \in A$ son image inverse par l'isomorphisme \hat{t} (où t est une forme symétrisante sur A), c'est-à-dire l'unique élément de A vérifiant $t(\tau^\vee a) = \tau(a) \forall a \in A$.

Énonçons une propriété qui relie les définitions précédentes (voir par exemple [Ch09, Lemma 2.2.7.(1)]).

Proposition 2.2.7. *La forme linéaire τ est une trace si et seulement si τ^\vee est dans le centre $Z(A)$ de A .*

2.3 Éléments de Schur

On suppose maintenant que l'anneau \mathcal{O} est intègre; soit F son corps des fractions. On suppose de plus que la \mathcal{O} -algèbre A est libre de type finie en tant que \mathcal{O} -module et soit t une forme symétrisante sur A .

Soit k une extension finie de F et supposons que la k -algèbre $kA := k \otimes_{\mathcal{O}} A$ est semi-simple déployée : en particulier on a

$$kA \simeq \prod_{\chi \in \text{Irr}(kA)} M_\chi$$

où $\text{Irr}(kA)$ désigne l'ensemble des caractères irréductibles de kA et M_χ est une k -algèbre simple. Pour $\chi \in \text{Irr}(kA)$, on note $\pi_\chi : kA \rightarrow M_\chi$ la projection sur le facteur correspondant à χ . L'algèbre M_χ étant simple, par le lemme de Schur la restriction ω_χ de π_χ à $Z(kA)$ est à valeurs dans $k \simeq \text{End}_k(M)$. En restriction à $Z(A)$, on obtient un morphisme

$$\omega_\chi : Z(A) \rightarrow \mathcal{O}_k$$

du centre de A dans la clôture intégrale de \mathcal{O} dans k .

Définition 2.3.1. Pour $\chi \in \text{Irr}(kA)$, l'*élément de Schur*⁵ associé à χ relativement à la forme symétrisante t est l'élément $s_\chi \in k$ défini par :

$$s_\chi := \omega_\chi(\chi^\vee)$$

Voici une proposition très importante concernant ces éléments de Schur ([GP, Theorem 7.2.6]).

Proposition 2.3.2. *Les éléments s_χ sont non nuls et on a la relation suivante :*

$$t = \sum_{\chi \in \text{Irr}(kA)} \frac{1}{s_\chi} \chi$$

Remarque 2.3.3. Dans [GP], la définition des éléments de Schur est un peu différente; voir par exemple [Br00, Proposition 8.14] pour cette même proposition avec la définition donné ici.

5. Issaï SCHUR, Moghilev (Biélorussie, 1875) - Tel-Aviv (Israël, 1941).

Remarque 2.3.4. On peut montrer que les éléments de Schur s_χ pour $\chi \in \text{Irr}(kA)$ sont dans \mathcal{O}_k ([GP, Proposition 7.3.9]).

On utilisera la Proposition 2.3.2 pour calculer des éléments de Schur, lors de la Section 3.1.2.

2.4 Groupes de Grothendieck

Soient \mathcal{O} un anneau intègre et k un corps contenant \mathcal{O} . Soit A une \mathcal{O} -algèbre, libre de type fini en tant que \mathcal{O} -module. On suit ce qui est exposé dans [GP, Section 7.3].

Définition 2.4.1. Le *groupe de Grothendieck*⁶ associé à la k -algèbre $kA = k \otimes_{\mathcal{O}} A$, noté $\mathcal{R}_0(kA)$, est le groupe abélien engendré par les symboles $[V]$ où V décrit les kA -modules de type fini (à isomorphisme près), avec les relations $[V] = [V'] + [V'']$ pour chaque suite exacte $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ de kA -modules.

Deux kA -modules V et V' donnent les mêmes éléments dans $\mathcal{R}_0(kA)$ si ils ont les mêmes facteurs de composition *i.e.* les mêmes facteurs, à isomorphisme près et comptés avec multiplicité, dans une suite de Jordan–Hölder.

Proposition 2.4.2. *Le groupe abélien $\mathcal{R}_0(kA)$ est libre, engendré par les classes d'isomorphismes de modules simples.*

Définition 2.4.3. On note $\mathcal{R}_0^+(kA)$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}_0(kA)$ formé des éléments $[V]$ où V est un kA -module.

Remarque 2.4.4. L'ensemble $\mathcal{R}_0^+(kA)$ n'est pas un groupe mais un monoïde ; en particulier, si V est un kA -module de type fini alors $[V] = \sum_W n_W [W]$ où la somme porte sur un nombre fini de modules simples de type fini W et où $n_W \in \mathbb{N}^*$; remarquons que $n_W =: [V : W]$ n'est rien d'autre que le nombre de fois que le module W apparaît dans la suite des quotients successifs d'une suite de Jordan–Hölder de V .

Définition 2.4.5. Soit X une indéterminée et soit $\mathcal{F}(A, k[X])$ la k -algèbre des applications de A dans $k[X]$ (la multiplication étant donnée par $(fg)(a) := f(a)g(a)$). On définit l'application suivante :

$$\mathfrak{p}_k : \begin{cases} \mathcal{R}_0^+(kA) & \rightarrow \mathcal{F}(A, k[X]) \\ [V] & \mapsto (a \mapsto \chi_{\rho_V(a)}) \end{cases}$$

où $\rho_V(a) \in \text{Hom}(V, V)$ est la multiplication à gauche par a et $\chi_{\rho_V(a)}$ est son polynôme caractéristique.

Voici un théorème qui décrit le comportement des groupes de Grothendieck vis-à-vis des extensions de corps (voir par exemple [GP, Lemma 7.3.4]).

6. Alexandre GROTHENDIECK, Berlin (Allemagne, 1928) - Saint-Lizier (France, 2014).

Théorème 2.4.6. *Soit K/k une extension de corps. Il y a une application canonique $d_k^K : R_0(kA) \rightarrow R_0(KA)$ donnée par $[V] \mapsto [V \otimes_k K]$. De plus, on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(kA) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & \mathcal{F}(A, k[X]) \\ \downarrow d_k^K & & \downarrow t_k^K \\ R_0^+(KA) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_K} & \mathcal{F}(A, K[X]) \end{array}$$

où $t_k^K : \mathcal{F}(A, k[X]) \hookrightarrow \mathcal{F}(A, K[X])$ est l'injection canonique. Si de plus kA est déployée alors d_k^K est un isomorphisme, qui préserve les classes d'isomorphismes de modules simples.

2.5 Matrices de décomposition

On suppose maintenant que \mathcal{O} est (commutatif, unitaire, intègre et) intégralement clos dans k .

Définition 2.5.1. Une *spécialisation* de \mathcal{O} est la donnée d'un morphisme d'anneau $\theta : \mathcal{O} \rightarrow K$ où K est le corps des fractions de $\theta(\mathcal{O})$.

Soit $\mathcal{R} \subseteq k$ un sous-anneau contenant \mathcal{O} . On suppose que \mathcal{R} est un *anneau de valuation* : rappelons que cela signifie que $\forall x \in k \setminus \{0\}$ on a $x \in \mathcal{R}$ ou $x^{-1} \in \mathcal{R}$. En particulier, l'anneau \mathcal{R} possède un unique idéal maximal, que l'on note $\mathfrak{m}_{\mathcal{R}}$; on note $k_{\mathcal{R}} := \mathcal{R}/\mathfrak{m}_{\mathcal{R}}$ le corps résiduel.

Soit V un kA -module. D'après [GP, 7.3.7], il existe une k -base de V telle que la représentation correspondante $\rho : kA \rightarrow M_n(k)$ (avec $n = \dim_k V$) vérifie $\rho(a) \in M_n(\mathcal{R}) \forall a \in A$; le $\mathcal{R}A$ -réseau \tilde{V} engendré par cette base vérifie $\tilde{V} \otimes_{\mathcal{R}} k \simeq V$. On dit que le $k_{\mathcal{R}}$ -espace vectoriel $\tilde{V} \otimes_{\mathcal{R}} k_{\mathcal{R}}$ est la *réduction modulaire* de \tilde{V} ; remarquons que cet espace est muni d'une structure de $k_{\mathcal{R}}A$ -module via $(v \otimes 1)(a \otimes 1) := (va) \otimes 1$ pour $v \in V$ et $a \in A$. Finalement, on note $k\tilde{V} := \tilde{V} \otimes_{\mathcal{R}} k$ et $k_{\mathcal{R}}\tilde{V} := \tilde{V} \otimes_{\mathcal{R}} k_{\mathcal{R}}$.

On va énoncer un théorème ([GP, Theorem 7.4.3]) qui va permettre de définir une notion importante.

Théorème 2.5.2. *Soit $\theta : \mathcal{O} \rightarrow K$ une spécialisation de \mathcal{O} . On suppose que $\mathfrak{m}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{O} = \ker \theta$ et que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- (i) *l'algèbre KA est déployée ;*
- (ii) *on a $K = k_{\mathcal{R}}$ et $k_{\mathcal{R}}$ est parfait.*

Sous ces hypothèses, on obtient les résultats suivants.

- La réduction modulaire induit un morphisme de monoïdes (i.e. une application additive) $d_\theta : R_0^+(kA) \rightarrow R_0^+(KA)$ vérifiant $d_\theta([k\tilde{V}]) = [k_{\mathcal{R}}\tilde{V}]$, où \tilde{V} est un $\mathcal{R}A$ -réseau et où $[k_{\mathcal{R}}\tilde{V}]$ est considéré comme un élément de $R_0^+(KA)$ via l'identification entre $R_0(k_{\mathcal{R}}A)$ et $R_0(KA)$ (note⁷).
- L'image de \mathfrak{p}_k est contenue dans $\mathcal{F}(A, \mathcal{O}[X])$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_0^+(kA) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_k} & \mathcal{F}(A, \mathcal{O}[X]) \\ \downarrow d_\theta & & \downarrow t_\theta \\ R_0^+(KA) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_K} & \mathcal{F}(A, K[X]) \end{array}$$

où $t_\theta : \mathcal{F}(A, \mathcal{O}[X]) \rightarrow \mathcal{F}(A, K[X])$ est l'application induite par θ .

- L'application d_θ est uniquement déterminée par la commutativité du diagramme précédent. En particulier, elle ne dépend que de t et pas du choix de l'anneau \mathcal{R} .

Définition 2.5.3. L'application d_θ précédente est appelée *morphisme de décomposition* associée à la spécialisation $\theta : \mathcal{O} \rightarrow K$. Sa matrice dans des bases de $R_0(kA)$ et de $R_0(KA)$ formées de classes de modules simples est appelée *matrice de décomposition* associée à θ .

Ainsi, pour chaque kA -module simple V on a une relation $d_\theta([V]) = \sum_{V'} d_{V,V'}[V']$ avec $d_{V,V'} \in \mathbb{N}$ (cf. Remarque 2.4.4) où V' décrit les KA -modules simples (à isomorphisme près).

On va maintenant énoncer deux résultats importants (voir par exemple [GP, Theorem 7.4.6] et [GP, Theorem 7.4.7]).

Théorème 2.5.4 (Théorème de déformation de Tits⁸). *Supposons que kA et KA sont déployées. Si KA est semi-simple, alors kA l'est également et d_θ est un isomorphisme qui préserve les classes d'isomorphismes de modules simples. En particulier les ensembles $\text{Irr}(kA)$ et $\text{Irr}(KA)$ sont en bijection, autrement dit la matrice de décomposition est une matrice de permutation.*

On peut en outre utiliser le critère de semi-simplicité suivant.

Théorème 2.5.5. *Supposons que kA et KA sont déployées et que A soit symétrique de forme symétrisante t . Si V est un kA -module simple, on note $s_V \in \mathcal{O}$ l'élément de Schur pour la forme t^k induite par t sur kA . L'algèbre KA est semi-simple si et seulement si $\theta(s_V) \neq 0$ pour tout $V \in \text{Irr}(kA)$.*

On va s'intéresser à trouver des bases de modules simples telles que la matrice de décomposition est unitriangulaire (i.e. triangulaire avec des 1 sur

7. L'identification est claire si $K = k_{\mathcal{R}}$ et résulte du Théorème 2.4.6 si KA est déployée.

8. Jacques TITS, 1930 (Uccle, Belgique).

la diagonale); on se réfère à [GJ, Paragraphe 3.1.7]. En effet, cela permet d'avoir beaucoup d'informations sur les modules simples de KA à partir de ce que l'on sait sur les modules simples de kA .

Pour cela, supposons que l'on dispose d'une relation d'ordre partiel sur les éléments de $\text{Irr}(kA)$.

Définition 2.5.6. Supposons que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

- Pour $V' \in \text{Irr}(KA)$, l'ensemble $\mathcal{S}_\theta(V') := \{V \in \text{Irr}(kA) : d_{V,V'} \neq 0\}$ possède un unique élément minimal, noté $V_{V'}$, pour l'ordre précédent.
 - On a $d_{V_{V'},V'} = 1$.
 - L'application $\text{Irr}(KA) \rightarrow \text{Irr}(kA)$ qui à V' associe $V_{V'}$ est injective.
- L'ensemble $B_\theta := \{V_{V'} : V' \in \text{Irr}(KA)\} \subseteq \text{Irr}(kA)$ est appelé *ensemble basique* pour KA pour l'ordre choisi.

On obtient une bijection $\begin{array}{c|c} \text{Irr}(KA) & \longrightarrow & B_\theta \\ V' & \longmapsto & V_{V'} \end{array}$. La forme unitriangulaire pour la matrice de décomposition s'obtient en écrivant $B_\theta = \{V_1, \dots, V_n\}$ avec $V_i < V_j \implies i < j$. En écrivant $\text{Irr}(KA) = \{V'_1, \dots, V'_n\}$ où $V_i = V_{V'_i}$, la matrice de terme général d_{V_i, V'_i} est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On reviendra sur les ensembles basiques dans la Section 3.3.

3 Algèbres de Hecke

3.1 Cas des groupes de Coxeter finis

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1. Soit (W, S) un système de Coxeter et soit A un anneau commutatif unitaire. Soient $\{a_s, b_s\}_{s \in S}$ des éléments de A vérifiant la condition $a_s = a_t$ et $b_s = b_t$ si $s, t \in S$ sont conjugués. La A -algèbre $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A(W, S, \{a_s, b_s\}_{s \in S})$ engendrée par les générateurs T_s pour $s \in S$ et les relations suivantes :

$$\begin{aligned} T_s^2 &= a_s \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + b_s T_s \text{ pour } s \in S \\ \text{B}(T_s, T_t; m_{s,t}) &= \text{B}(T_t, T_s; m_{s,t}) \text{ pour } s \neq t \end{aligned}$$

est appelée *algèbre d'Iwahori-Hecke* (notes^{9 10}) de (W, S) sur l'anneau A avec paramètres $\{a_s, b_s\}_{s \in S}$.

Remarque 3.1.2. La condition sur les a_s et b_s est présente pour garantir de bonnes propriétés pour \mathcal{H} .

9. Nagayoshi IWAHORI, 1926 - 2011.

10. Erich HECKE, 1887 (Buk, Pologne) - 1947 (Copenhague, Danemark).

Exemple 3.1.3. Avec $a_s = 1$ et $b_s = 0$ pour tout $s \in S$, les relations donnent $T_s^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ puis $(T_s T_t)^{m_{s,t}} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ (cf. Remarque 1.2.15). Ainsi, l'algèbre de Iwahori–Hecke associée est canoniquement isomorphe à l'algèbre de groupe $A[W]$: c'est pourquoi on dit que \mathcal{H} est une déformation de $A[W]$.

3.1.2 Propriétés

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A(W, S, \{a_s, b_s\}_{s \in S})$ une algèbre de Iwahori–Hecke sur un anneau commutatif A comme précédemment. On va maintenant énoncer quelques résultats sur les générateurs de \mathcal{H} et leurs relations (cf. [GP, Section 4.4]).

Tout d'abord, par le théorème de Matsumoto (Théorème 1.1.24) appliqué au monoïde $\mathcal{M} := \{T_{s_1} \cdots T_{s_n} : n \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$, on obtient l'existence d'éléments $T_w \in \mathcal{H}$ pour $w \in W$ vérifiant $T_w = T_{s_1} \cdots T_{s_n}$ où $w = s_1 \cdots s_n$ est une expression réduite, avec en particulier $T_{\mathbf{1}_W} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$.

Proposition 3.1.4. *Pour $s \in S$ et $w \in W$ on a :*

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{si } \ell(sw) > \ell(w) \\ a_s T_{sw} + b_s T_w & \text{si } \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

une relation analogue étant valable pour $T_w T_s$.

Proposition 3.1.5. *L'algèbre \mathcal{H} admet la présentation suivante :*

générateurs T_w pour $w \in W$

relations $\begin{cases} T_s^2 = a_s T_1 + b_s T_s \text{ pour } s \in S \\ T_w = T_{s_1} \cdots T_{s_n} \text{ si } w = s_1 \cdots s_n \text{ avec } s_i \in S \text{ est réduite.} \end{cases}$

On a en fait même un peu plus (voir par exemple [GP, Theorem 4.4.6]).

Théorème 3.1.6 (Bourbaki). *Le A -module \mathcal{H} est libre et $\{T_w : w \in W\}$ en est une base.*

Définition 3.1.7. On dit que $\{T_w : w \in W\}$ est la base *standard* de \mathcal{H} .

On va maintenant énoncer un critère simple (voir par exemple [GP, Proposition 8.1.1]) pour que l'algèbre \mathcal{H} soit symétrique, et donc pouvoir utiliser ce qui a été fait dans la Section 2.

Proposition 3.1.8. *Définissons la forme linéaire $\tau : \mathcal{H} \rightarrow A$ par $\tau(T_1) := 1$ et $\tau(T_w) := 0$ pour $w \in W \setminus \{1\}$. On a :*

$$\tau(T_w T_{w'}) = \begin{cases} a_w & \text{si } w^{-1} = w' \\ 0 & \text{si } w^{-1} \neq w' \end{cases}$$

où $a_w \in A$ est défini par $a_w := a_{s_1} \cdots a_{s_n}$ où $w = s_1 \cdots s_n$ pour $s_i \in S$ est réduite. Si tous les a_s pour $s \in A$ sont inversibles dans A , la forme τ est symétrisante.

Soit L une fonction de poids sur W et soit q une indéterminée. On peut définir l'algèbre de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(W, L)$ où L est une fonction poids sur W comme étant la $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -algèbre engendrée par les éléments $(T_s)_{s \in S}$ avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(T_s, T_t; m_{s,t}) &= \mathrm{B}(T_t, T_s; m_{s,t}) \quad \forall s \neq t \in S \\ (T_s - q^{L(s)})(T_s + q^{-L(s)}) &= 0 \quad \forall s \in S \end{aligned}$$

On retombe sur la définition précédente en posant $a_s = 1$ et $b_s = q^{L(s)} - q^{-L(s)}$; en outre, on obtient l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[W]$ avec la spécialisation $q \mapsto 1$. Si $L(s) = L(t) \forall s, t \in S$ on dit que l'on est dans le cas de paramètres égaux (« *equal parameter case* »).

Exemple 3.1.9. Avec $W = \mathfrak{S}_3$ on a vu que $W = \langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^3 \rangle$. L'algèbre de Iwahori-Hecke associée avec $L \equiv \lambda \in \mathbb{N}$ (cas de paramètres égaux) est donnée par

$$\langle T_s, T_t \mid (T_s - q^\lambda)(T_s + q^{-\lambda}) = (T_t - q^\lambda)(T_t + q^{-\lambda}) = 0, T_s T_t T_s = T_t T_s T_t \rangle$$

Afin d'utiliser ce qui a été exposé avant, on énonce le théorème suivant ([GP, Theorem 8.1.7]).

Théorème 3.1.10. *Il existe un corps k contenant $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ tel que la k -algèbre $k\mathcal{H}$ est semi-simple déployée et isomorphe à $k[W]$. De plus, on a une bijection $\phi : \mathrm{Irr}(k\mathcal{H}) \rightarrow \mathrm{Irr}(W)$.*

À propos de la démonstration. Après avoir justifié l'existence de k , on spécialise $k\mathcal{H}$ via $q \mapsto 1 \in \mathbb{C}$ pour obtenir l'algèbre $\mathbb{C}[W]$ qui est semi-simple ; par le théorème de déformation de Tits (Théorème 2.5.4) on obtient le résultat, en utilisant $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}[W]) = \mathrm{Irr}(W)$. \square

Quand q se spécialise sur un complexe $\eta \neq 0$, si l'algèbre obtenue \mathcal{H}_η est semi-simple alors le théorème de Tits s'applique encore et on obtient $\mathrm{Irr}(k\mathcal{H}) \simeq \mathrm{Irr}(k(\eta)\mathcal{H}_\eta)$, et donc par ce qui précède les représentations irréductibles de $k(\eta)\mathcal{H}_\eta$ se déduisent de celles de W . Il est donc légitime de regarder ce qui se passe lorsque la spécialisation choisie ne donne plus une algèbre semi-simple : c'est ce que l'on fera dans les Sections 3.3 et 4.

Finissons cette section avec le calcul des éléments de Schur pour l'algèbre de Hecke \mathcal{H} associée à $\mathfrak{S}_3 = \{s_1, s_2\}$ avec paramètres $a_{s_i} = q$ et $b_{s_i} = q - 1$ où q une indéterminée ; en particulier on a les relations suivantes ($i \in \{1, 2\}$) :

$$(T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) = 0$$

Tout d'abord, voici la table de caractères de \mathcal{H} (par exemple d'après [GP, Table 8.1]) :

	T_1	T_{s_1}	$T_{s_1 s_2}$
ind	1	q	q^2
ϵ	1	-1	1
χ_1	2	$q - 1$	$-q$

D'après la Proposition 2.3.2, on a la relation :

$$\tau = \frac{1}{s_{\text{ind}}}\text{ind} + \frac{1}{s_{\epsilon}}\epsilon + \frac{1}{s_{\chi_1}}\chi_1 \quad (3.1.1)$$

où $\tau : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ est la forme symétrisante définie précédemment, qui vérifie donc :

$$\frac{\quad}{\tau} \begin{array}{ccc|c} & T_1 & T_{s_1} & T_{s_1 s_2} \\ \hline & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

En évaluant la relation (3.1.1) en T_1 , T_{s_1} puis $T_{s_1}T_{s_1 s_2}$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{s_{\text{ind}}} + \frac{1}{s_{\epsilon}} + \frac{2}{s_{\chi_1}} \\ 0 = \frac{q}{s_{\text{ind}}} - \frac{1}{s_{\epsilon}} + \frac{q-1}{s_{\chi_1}} \\ 0 = \frac{q^2}{s_{\text{ind}}} + \frac{1}{s_{\epsilon}} - \frac{q}{s_{\chi_1}} \end{cases}$$

que l'on réécrit, en notant par c les inverses des s :

$$\begin{cases} 1 = c_{\text{ind}} + c_{\epsilon} + 2c_{\chi_1} \\ 0 = qc_{\text{ind}} - c_{\epsilon} + (q-1)c_{\chi_1} \\ 0 = q^2c_{\text{ind}} + c_{\epsilon} - qc_{\chi_1} \end{cases}$$

On obtient successivement (par la méthode du pivot) :

$$\begin{cases} 1 = c_{\text{ind}} + c_{\epsilon} + 2c_{\chi_1} \\ -q = -(q+1)c_{\epsilon} - (q+1)c_{\chi_1} \\ -q^2 = (-q^2+1)c_{\epsilon} - (2q^2+q)c_{\chi_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = c_{\text{ind}} + c_{\epsilon} + 2c_{\chi_1} \\ -q = -(q+1)c_{\epsilon} - (q+1)c_{\chi_1} \\ -q^2 = (-q^2+1)c_{\epsilon} - (2q^2+q)c_{\chi_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = c_{\text{ind}} + c_{\epsilon} + 2c_{\chi_1} \\ -q = -(q+1)c_{\epsilon} - (q+1)c_{\chi_1} \\ -q = -(q^2+q+1)c_{\chi_1} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} s_{\chi_1} = q+1+q^{-1} \\ s_{\epsilon} = 1+2q^{-1}+2q^{-2}+q^{-3} \\ s_{\text{ind}} = q^3+2q^2+2q+1 \end{cases}$$

Remarquons les symétries présentes ; en fait, reprenant la Section 4.2.2, le tableau de Young associé à ind est $\square\square\square$ et celui associé à ϵ est $\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$: ces

deux diagrammes sont « symétriques » l'un de l'autre (on dit *duaux*) et on a $s_\epsilon(q) = s_{\text{ind}}(q^{-1})$. De plus, la partition associée à χ_1 , $\begin{smallmatrix} \square & \\ \square & \end{smallmatrix}$, est auto-duale et le polynôme s_{χ_1} est symétrique.

3.2 Cas des groupes de réflexions complexes

3.2.1 Définitions

Soit $W \subseteq \text{GL}(V)$ un groupe de réflexions complexe et soit \mathcal{A} l'ensemble des hyperplans associés aux éléments de W . On définit la *variété régulière* $V^{\text{reg}} := V \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H$ et le *groupe de tresses* de W par $B_W := \pi_1(V^{\text{reg}}/W, x_0)$ où π_1 désigne le groupe fondamental et x_0 est un point base fixé.

Pour un hyperplan $H \in \mathcal{A}$, on note $W_H \subseteq W$ l'ensemble des éléments de W dont H est un hyperplan de points fixes : ainsi, tous ses éléments (excepté l'identité) sont des réflexions complexes. On note e_H l'ordre du groupe W_H .

Proposition 3.2.1. *Le groupe W_H est cyclique.*

Démonstration. Rappelant ce qui a été annoncé lors de la Remarque 1.2.5, pour $\alpha \in H^\perp$ non nul chaque élément de W_H est uniquement déterminé par l'image de α , qui est de la forme $\zeta\alpha$ pour ζ une racine de l'unité. Comme W_H est d'ordre e_H , les éléments ζ sont dans $\mu_{e_H}(\mathbb{C})$. On obtient donc une application injective $\left. \begin{array}{l} W_H \rightarrow \mu_{e_H}(\mathbb{C}) \\ u \mapsto \zeta \end{array} \right\}$, qui est un isomorphisme par égalité des ordres. □

Les entiers e_H pour H dans $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$ sont tous égaux : en effet, pour $u \in W$ on a $W_{u(H)} = uW_Hu^{-1}$. On note $e_{\mathcal{C}}$ cet entier commun.

On choisit maintenant un ensemble d'indéterminées $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{\mathcal{C},j})_{\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W, 0 \leq j < e_{\mathcal{C}}}$ et on note $\mathbf{k} := \mathbb{C}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^{-1}]$ l'anneau de Laurent en les indéterminées $\mathbf{q}_{\mathcal{C},j}$. Finalement, si e est un entier on note $\zeta_e := \exp\left(\frac{2i\pi}{e}\right)$.

Définition 3.2.2. *L'algèbre de Hecke générique associée à W , notée $\mathcal{H}(W)$, est le quotient de l'algèbre $\mathbf{k}[B_W]$ par l'idéal engendré par les éléments*

$$\prod_{j=0}^{e_{\mathcal{C}}-1} (T_H - \zeta_{e_{\mathcal{C}}}^j \mathbf{q}_{\mathcal{C},j})$$

pour $H \in \mathcal{A}$, l'élément \mathcal{C} étant l'orbite de H sous l'action de W et T_H désignant un générateur de la monodromie autour de H (cf. par exemple [BMR, Définition 4.21]).

Remarque 3.2.3. Les racines de l'unité garantissent que la spécialisation de toutes les indéterminées sur 1 font retomber sur l'algèbre de groupe.

Remarque 3.2.4. Comme pour les groupes de Coxeter, on peut définir l'algèbre de Hecke par la $\mathbb{Z}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^{-1}]$ -algèbre donnée par le quotient de l'algèbre $\mathbb{Z}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^{-1}]B_W$ par l'idéal engendré par les éléments

$$(\mathbf{s} - \mathbf{q}_{\mathcal{C},0}) \cdots (\mathbf{s} - \mathbf{q}_{\mathcal{C},e_{\mathcal{C}}-1})$$

où \mathcal{C} décrit les éléments de \mathcal{A}/W et où \mathbf{s} parcourt l'ensemble des générateurs de la monodromie autour des images dans V^{reg} des éléments de l'orbite \mathcal{C} . C'est en fait ainsi qu'est définie l'algèbre de Hecke dans [BMR], cité précédemment.

On sait à quoi ressemble l'algèbre de Hecke grâce au théorème suivant (voir [Be, Theorem 0.1] pour plus de détails).

Théorème 3.2.5. *Soit W un groupe de réflexions complexe irréductible. Si S est l'ensemble des générateurs d'une bonne présentation de G , il existe un sous-ensemble \mathbf{S} du groupe de tresses B_W et une correspondance bijective $S \ni s \mapsto \mathbf{s} \in \mathbf{S}$ telle le groupe B_W admet la présentation suivante :*

générateurs les éléments de \mathbf{S} ;

relations on prend les relations de tresses entre les éléments de S et on les applique aux éléments de \mathbf{S} .

En ce qui concerne les indéterminées $\mathbf{q}_{\mathcal{C},j}$ qui interviennent dans la définition de l'algèbre de Hecke, on peut les réindexer par $\mathbf{q}_{s,j}$ avec $s \in S$ et $0 \leq j < \text{ordre}(s)$ avec $\mathbf{q}_{s,j} = \mathbf{q}_{t,j} \forall j$ si $s \neq t \in S$ sont conjugués (en particulier $H_s = wH_t$ pour $w \in W$ si et seulement si s et t sont conjugués dans W , et comme s est un générateur on a $e_{H_s} = \text{ordre}(s)$). De plus, l'élément \mathbf{s} du théorème précédent est un générateur de la monodromie autour de l'hyperplan H_s .

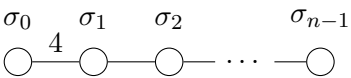
Exemple 3.2.6. Avec $W = G_{16} = \langle s, t \mid sts = tst, s^5 = t^5 = 1 \rangle$, par la démonstration du Lemme 1.1.28 on sait que s et t sont conjugués dans W . Ainsi, $\mathbf{q}_{s,j} = \mathbf{q}_{t,j} \forall j = 0 \dots 4$ et l'algèbre de Hecke associée à W est la $\mathbb{C}[\{\mathbf{q}_j^{\pm 1}\}_{0 \leq j \leq 4}]$ -algèbre de présentation

$$\left\langle S, T \mid STS = TST, \prod_{j=0}^4 (S - \zeta_5^j \mathbf{q}_j) = \prod_{j=0}^4 (T - \zeta_5^j \mathbf{q}_j) = 0 \right\rangle$$

Exemple 3.2.7. Avec $W = G(d, 1, n)$, le groupe W est engendré par les éléments $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ vérifiant les relations :

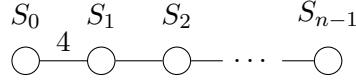
— $\sigma_0^d = 1$

— $\sigma_i^2 = 1 \forall 1 \leq i < n$

— les relations de tresses décrites par 

L'élément σ_0 n'est conjugué à aucun des σ_i pour $1 \leq i < n$ pour une raison d'ordre (si $d \neq 2$); de plus, σ_i et σ_{i+1} pour $1 \leq i < n - 1$ sont conjugués par la proposition (1.1.2) du Lemme 1.1.28 et donc les σ_i pour $1 \leq i < n$ sont deux à deux conjugués.

L'algèbre de Hecke correspondante est donc la $\mathbb{C}[\{\mathbf{q}_{\sigma_0, j}^{\pm 1}\}_{0 \leq j < d}, \mathbf{q}_0^{\pm 1}, \mathbf{q}_1^{\pm 1}]$ -algèbre donnée par les générateurs S_0, \dots, S_{n-1} , le diagramme de tresses suivant :



et finalement les relations :

$$\prod_{j=0}^{d-1} (S_0 - \zeta_d^j \mathbf{q}_{\sigma_0, j}) = 0$$

$$(S_i - \mathbf{q}_0)(S_i + \mathbf{q}_1) = 0 \quad \forall 1 \leq i < n$$

3.2.2 Propriétés

La conjecture suivante, vraie pour les groupes de Coxeter, reste valide pour les groupes de la série infinie des $G(de, e, n)$ et quelques groupes exceptionnels (cf. [Ch14, Hypothesis 3.3] par exemple pour plus de détails).

Conjecture 3.2.8. *Soit W un groupe de réflexions complexe.*

- *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$ associée à W est libre sur \mathbf{k} de rang $|W|$.*
- *Il existe une « bonne » forme symétrisante τ sur $\mathcal{H}(W)$, qui se spécialise sur la forme symétrisante canonique de W (cf. Exemple 2.2.5) via $\mathbf{q}_{c, j} \mapsto 1$.*

Cette conjecture entraîne l'analogie du Théorème 3.1.10 (voir [Ma, Theorem 5.2] pour plus de détails).

Théorème 3.2.9. *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$ devient semi-simple déployée lorsque l'on y ajoute des racines des indéterminées.*

En particulier, on peut appliquer le théorème de Tits : la spécialisation des indéterminées sur 1 donne une bijection entre $\text{Irr}(W)$ et les caractères de l'algèbre semi-simple déployée précédente.

3.3 Ensembles basiques canoniques

Soit q une indéterminée et soit \mathcal{H} une $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ -algèbre de Hecke associée à un groupe W de réflexions (réel ou complexe), de forme symétrisante τ . Dans le cas complexe, on se place dans le cas spécialisé pour une spécialisation φ qui est *cyclotomique*, c'est-à-dire déterminée par $\varphi(\mathbf{q}_{c, j}) := q^{m_{c, j}}$ où $m_{c, j} \in \mathbb{Z}$. On a déjà vu lors de la Définition 2.5.6 la notion d'ensemble basique ; le

but est maintenant de trouver ou au moins de prouver l'existence de tels ensembles « canoniques » au sens où l'ordre considéré sur $\text{Irr}(W)$ est issu d'une certaine fonction $a : \text{Irr}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ de la façon suivante :

$$V < W \stackrel{\text{déf}}{\iff} a(V) < a(W)$$

D'après [Ch09, Proposition 4.3.4] il existe un corps k contenant une racine y de q tel que $k\mathcal{H}$ est semi-simple déployée, d'où une bijection $\phi : \text{Irr}(k\mathcal{H}) \rightarrow \text{Irr}(W)$ par le théorème de déformation de Tits. De plus, la forme symétrisante sur $k\mathcal{H}$ est donnée par la forme symétrisante sur l'algèbre de Hecke générique via la spécialisation φ .

Définition 3.3.1. Pour $E \in \text{Irr}(W)$, on définit $a(E) := -\text{val}_q(s_E)$ où s_E est l'élément de Schur associé à $\phi^{-1}(E) \in \text{Irr}(k\mathcal{H})$. On écrira $a_E := a(E)$.

Remarque 3.3.2. Les éléments de Schur sont dans $\mathbb{Z}_k[y, y^{-1}]$ donc on peut bien parler de leur valuation (cf. Remarque 2.3.4).

Plaçons-nous dans le cas où on dispose d'une spécialisation $\theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $\theta(q) = \eta \neq 0$ et qui rend l'algèbre spécialisée \mathcal{H}_η non semi-simple (voir ce qui suit le Théorème 3.1.10). Dans ce cas, un ensemble basique canonique relativement à θ est un sous-ensemble \mathcal{B}_θ de $\text{Irr}(k\mathcal{H}) \simeq \text{Irr}(W)$ tel que :

- il y a une bijection $\text{Irr}(k(\eta)\mathcal{H}_\eta) \rightarrow \mathcal{B}_\theta$, qui à un module M associe un module de $\text{Irr}(k\mathcal{H})$ que l'on note E_M ;
- on a $[E_M : M] = 1$ pour tout $M \in \text{Irr}(k(\eta)\mathcal{H}_\eta)$ (note¹¹) ;
- si $[E : M] \neq 0$ pour $E \in \text{Irr}(k\mathcal{H})$ et $M \in \text{Irr}(k(\eta)\mathcal{H}_\eta)$ alors $E = E_M$ ou $a_{E_M} < a_E$.

Comme on peut voir dans [Ch14, après Définition 2.19], pour les groupes de Coxeter finis de tels ensembles basiques canoniques existent toujours. Ce qui nous intéresse ici est de prouver leur existence pour les groupes $G(d, 1, n)$ et plus particulièrement donner en terme de non annulation d'un certain foncteur (cf. [CGG, Corollary 4.7]). Une telle démarche a déjà aboutie pour les groupes de Coxeter finis ([CGG, Theorem 1.2]). En outre, on donnera une fonction a définie sur $\text{Irr}(k\mathcal{H})$ qui donnera un ensemble basique canonique (de la même manière que dans la Proposition 4.1.4).

11. Rappelons que si V et W sont deux modules, la quantité $[V : W]$ désigne le nombre de fois où W apparaît dans la suite des quotients successifs d'une suite de Jordan–Hölder de V . Dans notre cas, on simplifie la notation en écrivant E_M au lieu de $d_\theta(E_M)$ où d_θ est le morphisme de décomposition associé à θ .

4 Ensembles basiques canoniques via les algèbres de Cherednik

4.1 Algèbres de Cherednik et foncteur KZ

On suit dans ce paragraphe ce qui est exposé dans [CGG, 2.6–2.9]. Soient $\{\mathbf{h}_{\mathcal{C},j}\}_{\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W, 0 \leq j < e_{\mathcal{C}}}$ et $\mathbf{R} := \mathbb{C}[\{\mathbf{h}_{\mathcal{C},j}\}]$. Rappelons tout d'abord que si V est un \mathbb{C} -espace vectoriel, la notation $\mathbf{R}[V]$ désigne l'espace des fonctions régulières sur V : c'est l'espace des polynômes multivariés où les indéterminées sont des éléments de V^* , isomorphe à l'algèbre symétrique de V^* , elle-même isomorphe à l'algèbre des polynômes en $\dim V$ indéterminées.

Finalement, pour $H \in \mathcal{A}$, soit $\alpha_H \in V^*$ tel que $H = \ker \alpha_H$ et soit $v_H \in V$ tel que $\mathbb{C}v_H$ soit un supplémentaire de H stable par W_H (un tel vecteur v_H existe, cf. Remarque 1.2.5); rappelons que e_H désigne le cardinal du groupe W_H .

Définition 4.1.1. L'algèbre de Cherednik¹² associée à W est la \mathbf{R} -algèbre \mathbf{H} donnée par $\mathbf{R}[V] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[W] \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[V^*]$ avec les règles de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} [y, y'] &= 0 \quad \forall y, y' \in V & [x, x'] &= 0 \quad \forall x, x' \in V^* \\ [y, x] &= \langle y, x \rangle + \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{\langle y, \alpha_H \rangle \langle v_H, x \rangle}{\langle v_H, \alpha_H \rangle} \gamma_H \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la dualité $V \times V^*$ et avec

$$\gamma_H := \sum_{w \in W \setminus \{1\}} \left(\sum_{j=0}^{e_{\mathcal{C}}-1} \det(w)^{-j} (\mathbf{h}_{\mathcal{C},j} - \mathbf{h}_{\mathcal{C},j-1}) \right) w$$

pour $H \in \mathcal{C}$ (et $\mathbf{h}_{\mathcal{C},-1} := \mathbf{h}_{\mathcal{C},e_{\mathcal{C}}-1}$).

Remarque 4.1.2. Plus concrètement, l'algèbre \mathbf{H} est la \mathbf{R} -algèbre engendrée par les éléments de V^* , de W et de V avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} yy' &= y'y \quad \forall y, y' \in V \\ xx' &= x'x \quad \forall x, x' \in V^* \\ yx &= xy + \langle y, x \rangle + \sum_{H \in \mathcal{A}} \frac{\langle y, \alpha_H \rangle \langle v_H, x \rangle}{\langle v_H, \alpha_H \rangle} \gamma_H \\ wy &= (w \cdot y)w \quad \forall w \in W \\ wx &= (w \cdot x)w \end{aligned}$$

où \cdot désigne l'action adéquate de W . En particulier, on a par exemple $wx^2 = (wx)x = (w \cdot x)wx = (w \cdot x)^2w$.

12. Ivan CHEREDNIK, 1951 (Moscou, Russie).

Soit $\Psi : \mathbf{R} \rightarrow R$ un morphisme où R est une \mathbb{C} -algèbre commutative locale noethérienne de corps résiduel k et soit $\psi : \mathbf{R} \rightarrow k$ le morphisme induit. On note $\mathbf{H}_\Psi := \mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} R$.

Définition 4.1.3. On note \mathcal{O}_Ψ la catégorie des \mathbf{H}_Ψ -modules de type fini, localement nilpotents¹³ pour l'action de $V \subseteq \mathbf{R}[V^*]$.

On énonce maintenant une proposition importante (voir par exemple [Rou, Section 5.1] pour plus de détails).

Proposition 4.1.4. *Il existe une fonction $c : \text{Irr}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ et un ordre partiel $<_c$ sur $\text{Irr}(W)$ qui fasse de \mathcal{O}_Ψ une catégorie de plus haut poids, l'ordre partiel $<_c$ étant donné par $E <_c E'$ si $c_{E'} - c_E \in \mathbb{Z}_{>0}$.*

Remarque 4.1.5. L'ordre en question est défini sur les *objets standards*, qui sont les $\Delta_\Psi(E)$ pour $E \in \text{Irr}(W)$, donnés par $\Delta_\Psi(E) := \mathbf{H}_\Psi \otimes_{R[V^*] \rtimes W} (R \otimes_{\mathbb{C}} E)$. On note également $L_\Psi(E)$ le module $\Delta_\Psi(E)$ quotienté par son radical ; c'est un module irréductible d'après [GGOR, 2.5.1]. Le fait que \mathcal{O}_Ψ soit une catégorie de plus haut poids pour l'ordre $<_c$ signifie en particulier que pour $E, E' \in \text{Irr}(W)$ on a :

$$\text{si } [\Delta_\Psi(E) : L_\Psi(E')] \neq 0 \text{ alors } E = E' \text{ ou } E' <_c E$$

En outre, il peut exister plusieurs fonctions dont l'ordre associé munisse \mathcal{O}_Ψ d'une structure de catégorie de plus haut poids ; on verra lors du Théorème 4.2.14 un exemple d'une telle fonction.

Rappelons que l'on a noté $\mathbf{k} := \mathbb{C}[\mathbf{q}, \mathbf{q}^{-1}]$ l'anneau de Laurent en les indéterminées $\mathbf{q}_{\mathcal{C},j}$ pour $\mathcal{C} \in \mathcal{A}/W$ et $0 \leq j < e_{\mathcal{C}}$. Soit $\Theta : \mathbf{k} \rightarrow R$ le morphisme donné par $\Theta(\mathbf{q}_{H,j}) := e^{2i\pi\Psi(\mathbf{h}_{H,j})}$; d'après [Rou, Section 5.2.1], on a un foncteur exact :

$$\text{KZ}_\Psi : \mathcal{O}_\Psi \rightarrow \mathcal{H}_\Theta - \text{mod}$$

(foncteur de Knizhnik–Zamalodchikov) où $\mathcal{H}_\Theta - \text{mod}$ désigne l'ensemble des \mathcal{H}_Θ -modules de type fini. En particulier, par exactitude, pour $E, E' \in \text{Irr}(W)$ avec $\text{KZ}_\Psi(L_\Psi(E')) \neq 0$ on a :

$$[\text{KZ}_\Psi(\Delta_\Psi(E)) : \text{KZ}_\Psi(L_\Psi(E'))] = [\Delta_\Psi(E) : L_\Psi(E')] \quad (4.1.1)$$

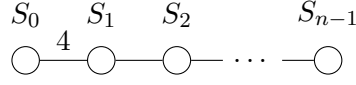
4.2 À la recherche d'ensembles basiques canoniques

4.2.1 Cadre

On se place dans le cas $W = G(d, 1, n)$; on va donner une petite généralisation de [CGG, Theorem 5.7].

Rappelons que l'algèbre de Hecke générique associée à W est générée par S_0, \dots, S_{n-1} avec les relations de tresses suivantes :

13. Un A -module M est localement nilpotent pour l'idéal B si $\forall m \in M, \exists n \in \mathbb{N}, B^n m = 0$.



et les relations :

$$\prod_{j=0}^{d-1} (S_0 - \zeta_d^j \mathbf{q}_{\sigma_0, j}) = 0$$

$$(S_i - \mathbf{q}_0)(S_i + \mathbf{q}_1) = 0 \quad \forall 1 \leq i < n$$

(cf. Exemple 3.2.7).

On considère $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{C}$ défini de la manière suivante :

$$\psi(\mathbf{h}_{\sigma_0, j}) := \frac{s_j}{e} - \frac{j}{d}$$

$$\psi(\mathbf{h}_0) := \frac{r}{e} \quad \psi(\mathbf{h}_1) := 0$$

où e, r sont des entiers strictement positifs et $(s_0, \dots, s_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$. Cette fonction induit un morphisme $\theta : \mathbf{k} \rightarrow \mathbb{C}$ en définissant comme avant $\theta(\mathbf{q}_{c, j}) := e^{2i\pi\psi(\mathbf{h}_{c, j})}$, on obtient donc :

$$\theta(\mathbf{q}_{\sigma_0, j}) = \zeta_e^{s_j} \zeta_d^{-j}$$

$$\theta(\mathbf{q}_0) = \zeta_e^r \quad \theta(\mathbf{q}_1) = 1$$

Ainsi, l'algèbre spécialisée \mathcal{H}_θ est engendrée par les S_i avec les relations de tresses précédentes ainsi que :

$$\prod_{j=0}^{d-1} (S_0 - \zeta_e^{s_j}) = 0$$

$$(S_i - \zeta_e^r)(S_i + 1) = 0 \quad \forall 1 \leq i < n$$

(on est dans le cas d'une algèbre d'*Ariki-Koike* (spécialisée) ; ces algèbres ont été introduites pour la première fois dans [AK]).

Considérons un d -uplet $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{d-1})$ de rationnels vérifiant $0 < u_j - u_i < e$ si $i < j$ et posons $\mathbf{t} := \frac{1}{r}(\mathbf{s} - \mathbf{u})$, en particulier $t_i = \frac{s_i - u_i}{r}$ pour $0 \leq i < d$. On va se servir du foncteur KZ_Ψ précédent pour caractériser un ensemble basique canonique pour l'algèbre de Hecke \mathcal{H}_θ ; comme annoncé dans la Section 3.3, on va définir une fonction définie sur $\text{Irr}(W)$ à valeurs scalaires.

Pour finir, résumons succinctement ce qui a déjà été fait dans [CGG, Section 5], où notre entier r est égal à 1 : l'ensemble \mathfrak{B} défini par la suite est utilisé pour calculer une fonction $a : \text{Irr}(W) \rightarrow \mathbb{C}$ qui est compatible avec l'ordre qui fait de \mathcal{O}_ψ une catégorie de plus haut poids. Ainsi, à l'aide du foncteur KZ_ψ , on récupère l'existence d'un ensemble basique canonique pour l'algèbre \mathcal{H}_θ , donné par les modules qui ne sont pas annulés par KZ_ψ .

Remarquons de l'existence d'un ensemble basique canonique dans ce cas a été obtenue d'une autre façon dans [Ja, Theorem 4.7], où le théorème de Ariki (cf. [Ar]) est utilisé ; cela permet d'avoir une description des modules annulés par KZ_ψ .

4.2.2 Intermède combinatoire

Définition 4.2.1. Une *composition* de l'entier n est une suite $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ d'entiers strictement positifs de *taille* $|\lambda| := \sum_{i=1}^h \lambda_i$ égale à n ; si la suite est décroissante, on dit que λ est une *partition* et on note cela $\lambda \vdash n$. L'entier h est la *hauteur* de λ ; si $i > h$ on posera $\lambda_i := 0$.

Exemple 4.2.2. L'entier 4 admet cinq partitions : (4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1) et (1, 1, 1, 1).

Une manière commode de représenter les partitions est d'utiliser un *diagramme de Young*. Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_h)$ est une partition de n , on représente λ par un tableau à h lignes, la $i^{\text{ième}}$ ligne possédant λ_i cases.

Exemple 4.2.3. Les cinq partitions de 4 sont données par $\square\square\square\square$, $\square\square\square$, $\square\square$, $\square\square$ et \square .

On a le théorème très intéressant suivant ([FH, Lecture 4]).

Théorème 4.2.4. *Les partitions de n paramètrent les représentations irréductibles de \mathfrak{S}_n .*

On va maintenant généraliser légèrement la notion de partition.

Définition 4.2.5. Une *d -composition* (ou *multicomposition*) de n est un d -uplet $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d)})$ de compositions de taille $|\lambda| := |\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(d)}|$ égale à n . Si toutes les $\lambda^{(i)}$ sont des partitions, on dit que λ est une *d -partition* (ou *multipartition*) de n et on note cela $\lambda \vDash_d n$.

Dans le prolongement de la représentation par diagrammes de Young, on peut représenter une multipartition par un d -uplet de diagrammes de Young. Par exemple, la 3-partition de 12 donnée par ((2), (4, 3), (1, 1, 1)) se

représente par $(\square\square, \square\square\square\square, \square)$.

On a un analogue du Théorème 4.2.4 (cf. [Gr, Theorem 3.1]), qui commence à faire le rapprochement avec notre problème.

Théorème 4.2.6. *Les d -partitions de n paramètrent les représentations irréductibles de $G(d, 1, n)$.*

Étant donné $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d)})$ une d -composition de n , on définit l'ensemble des *nœuds* de λ par :

$$[\lambda] := \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : 1 \leq c \leq d, a \geq 1, 1 \leq b \leq \lambda_a^{(c)} \right\}$$

(remarquons que c'est un ensemble de cardinal n). De plus, étant donné $\gamma = (a(\gamma), b(\gamma), c(\gamma)) = (a, b, c)$ un nœud de λ , on définit son *contenu* par $\text{cont}(\gamma) := b - a$. Dans la représentation par diagrammes de Young de λ , le nœud $(a, b, c) \in [\lambda]$ correspond à la boîte située à la ligne a , colonne b du $c^{\text{ième}}$ tableau; ainsi, le contenu d'un nœud correspond à la différence entre la colonne et la ligne de la boîte correspondante. On définit également les contenus *chargés* de γ par $\vartheta(\gamma) := \text{cont}(\gamma) + \frac{sc}{r}$ et $\eta(\gamma) := \text{cont}(\gamma) + t_c$ (où \mathbf{s} et \mathbf{t} sont les d -uplets définis précédemment).

Pour finir cette section combinatoire, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ sont des compositions de *même taille*, on note :

$$\lambda \trianglelefteq \mu \text{ si } \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \sum_{i=1}^j \mu_i \quad \forall j \geq 1$$

(en prolongeant λ et μ comme précédemment par 0) et on note également $\lambda \triangleleft \mu$ si $\lambda \trianglelefteq \mu$ et $\lambda \neq \mu$; remarquons que \trianglelefteq est une relation d'ordre *partiel* (sur l'ensemble des partitions de n par exemple). Si maintenant λ est une partition, on définit la quantité suivante :

$$n(\lambda) := \sum_{i=1}^n (i-1)\lambda_i$$

Lemme 4.2.7. *Si $\lambda \triangleleft \mu$ alors $n(\lambda) > n(\mu)$.*

Démonstration. Notons h le maximum des hauteurs de λ et μ . Par hypothèse, il existe des entiers positifs δ_i non tous nuls qui vérifient :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 - \delta_1 \\ \lambda_2 &= \mu_2 + \delta_1 - \delta_2 \\ \lambda_3 &= \mu_3 + \delta_2 - \delta_3 \\ &\vdots \\ \lambda_h &= \mu_h + \delta_{h-1} - \delta_h \end{aligned}$$

avec $\delta_h = 0$. Ainsi, $n(\lambda) = \sum_{i=2}^h (i-1)\lambda_i = n(\mu) + \sum_{i=2}^h (i-1)(\delta_{i-1} - \delta_i)$. La dernière somme se réécrit $\sum_{i=2}^h (i-1)\delta_{i-1} - \sum_{i=2}^h (i-1)\delta_i = \sum_{i=1}^{h-1} i\delta_i - \sum_{i=2}^h (i-1)\delta_i = \delta_1 + \sum_{i=2}^{h-1} \delta_i - (h-1)\delta_h = \sum_{i=1}^{h-1} \delta_i > 0$ et on conclut. (Voir [GJ, Preuve de Proposition 5.5.16] pour une démonstration plus courte.) \square

Remarque 4.2.8. La réciproque est fautive, au sens où les deux partitions λ et μ peuvent ne pas être comparables pour l'ordre \triangleleft .

4.2.3 Ensembles basiques canoniques

Rappelons que $W = G(d, 1, n)$; on va maintenant définir une fonction $a : \text{Irr}(W) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui va nous fournir un ensemble basique canonique (cf. Section

3.3) pour $k\mathcal{H}_\theta$, où θ a été définie en 4.2.1. On a vu que $\text{Irr}(W)$ peut être indexé par l'ensemble des d -partitions de n , autrement dit $\text{Irr}(W) = \{E^\lambda : \lambda \vdash_d n\}$.

Soit z un entier naturel supérieur à $n+1 - \min t_j$ et soit $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d)})$ une d -composition de n . Pour chaque $1 \leq i \leq d$, on définit la suite suivante :

$$\mathfrak{B}^i := \left(\lambda_t^{(i)} - t + t_i + z \right)_{1 \leq t \leq z + [t_i]}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière, puis $\mathfrak{B} := (\mathfrak{B}^1, \dots, \mathfrak{B}^d)$; remarquons que les éléments listés ci-avant sont deux à deux distincts si $\lambda^{(i)}$ est une partition. Remarquons également que $z + [t_i] \geq 1$ car $z \geq n + 1 - \min t_j \geq n + 1 - t_i$ donc $z + t_i \geq n + 1 \in \mathbb{N}$ donc $z + [t_i] \geq n + 1$. De plus, on vérifie que la même condition $z \geq n + 1 - \min t_j$ garantit que \mathfrak{B} est exactement le « *shifted t-symbol* » de taille z défini dans [GJ, 5.5.5].

Soit $\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda) = (\kappa_t(\lambda))_t$ la suite des éléments de \mathfrak{B} rangés par ordre décroissant. La suite $\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda)$ est donc une partition, et on peut définir la quantité $n_{\mathbf{t}}(\lambda) := n(\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda))$. On définit alors :

$$a_{\mathbf{t},r}(\lambda) := r(n_{\mathbf{t}}(\lambda) - n_{\mathbf{t}}(\emptyset))$$

où \emptyset est vu comme une d -composition.

Remarque 4.2.9. Par [GJ, Proposition 5.5.11] la fonction $\mathbf{a}_{\mathbf{t},r}$ coïncide avec celle définie de la même façon que dans la Définition 3.3.1 pour l'algèbre de Hecke cyclotomique associée à la spécialisation suivante (où q est une indéterminée) :

$$\mathbf{q}_{\sigma_0, j} \mapsto q^{s_j - u_j} \quad \mathbf{q}_0 \mapsto q^r \quad \mathbf{q}_1 \mapsto 1$$

(on a vu que lors de la Section 3.3 que cette algèbre devient semi-simple déployée après ajout d'une racine de q).

Donnons un premier lemme, sans modification de la preuve de [CGG, Lemma 5.5].

Lemme 4.2.10. *Soient μ et μ' deux d -compositions telles que $\kappa_{\mathbf{t}}(\mu) \trianglelefteq \kappa_{\mathbf{t}}(\mu')$. Soit λ (respectivement λ') une d -composition déduite de μ (resp. μ') par l'ajout d'un nœud β (resp. β'). Si $\eta(\beta) < \eta(\beta')$ alors $\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda) \triangleleft \kappa_{\mathbf{t}}(\lambda')$.*

Remarque 4.2.11. En particulier, les partitions $\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda)$ et $\kappa_{\mathbf{t}}(\lambda')$ sont bien de même taille.

De même, le résultat suivant ([CGG, Proposition 5.6]) reste valable sans changement dans la preuve.

Proposition 4.2.12. *Soient λ et λ' deux d -compositions de n . Supposons que l'on peut numéroter les nœuds de λ (respectivement λ') avec $[\lambda] = \{\gamma_i\}$ (resp. $[\lambda'] = \{\gamma'_i\}$) de telle sorte que :*

$$\eta(\gamma_i) < \eta(\gamma'_i) \text{ si } \gamma_i \neq \gamma'_i$$

Alors $a_{\mathbf{t},r}(\lambda) > a_{\mathbf{t},r}(\lambda')$ ou $\lambda = \lambda'$.

À propos de la preuve. Comme annoncé, la preuve de [CGG] reste valable ; remarquons simplement que lors de l'ajout des nœuds b_1, \dots, b_{n-r} (cf. notations de la preuve de [CGG, Proposition 5.6]) les partitions $\kappa_{\mathbf{t}}$ successivement obtenues sont de même taille par le Lemme 4.2.10. \square

Remarque 4.2.13. La réciproque de cette proposition est fautive : en effet, avec les 2-partitions de 2 données par $\lambda = \left(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}, \emptyset\right)$ et $\lambda' = (\emptyset, \square\square)$ et les paramètres $r = 1$, $\mathbf{s} = (0, 1)$, $\mathbf{u} = (0, 1)$ et $e = 2$, les conditions sur \mathbf{u} sont bien respectées, on a $\mathbf{t} = \mathbf{s} - \mathbf{u} = (0, 0)$, avec $z := 3$ les symboles sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^1(\lambda) &= (3, 2, 0) & \mathfrak{B}^2(\lambda) &= (2, 1, 0) \\ \mathfrak{B}^1(\lambda') &= (2, 1, 0) & \mathfrak{B}^2(\lambda') &= (4, 1, 0) \end{aligned}$$

donc $a(\lambda) > a(\lambda')$. Si l'on choisit les étiquetages $\lambda = \left(\begin{smallmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{smallmatrix}, \emptyset\right)$ et $\lambda' = (\emptyset, \overline{\gamma_1 \gamma_2})$ on obtient $\gamma_1 \neq \gamma'_1$ mais $\eta(\gamma_1) = \eta(\gamma'_1)$. Remarquons cependant que l'autre étiquetage possible vérifie les conditions du théorème.

Donnons maintenant le théorème qui va garantir que l'ordre $a_{\mathbf{t},r}$ défini sur les d -partitions de n permet de définir un ensemble basique canonique (de la même façon que dans la Proposition 4.1.4). Comme avant, la démonstration découle de celle de [CGG, Theorem 5.7], que l'on va néanmoins reproduire car le fait que l'entier r soit ici pas nécessairement égal à 1 intervient un peu plus.

Théorème 4.2.14. *Soient λ et λ' deux d -partitions de n . Si $[\Delta_\psi(E^\lambda) : L_\psi(E^{\lambda'})] \neq 0$ alors $a_{\mathbf{t},r}(\lambda) > a_{\mathbf{t},r}(\lambda')$ ou $\lambda = \lambda'$.*

Démonstration. D'après le début de la preuve de [DG, Theorem 4.1], l'hypothèse implique que l'on peut indexer les nœuds de λ par $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ et de λ' par $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ de façon à ce qu'il existe des entiers $\mu_i \geq 0$ qui vérifient :

$$\begin{aligned} \mu_i &\equiv \beta(\gamma_i) - \beta(\gamma'_i) \pmod{d} \\ \mu_i &= d_{\beta(\gamma_i)} - d_{\beta(\gamma'_i)} + d(\text{cont}(\gamma_i) - \text{cont}(\gamma'_i))c_0 \end{aligned}$$

où l'on a conservé les notations $\beta, d_{(\cdot)}$ et c_0 de [DG], qui dans notre cas donnent :

$$\begin{aligned} - \beta(\gamma_i) &= c(\gamma_i) \text{ d'après [DG, (1.10)] ;} \\ - c_0 &= -\frac{r}{e} \text{ et } d_j = j - d\frac{s_j}{e} \text{ par ce qui suit [DG, (1.18)].} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_i &\equiv c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) \pmod{d} \\ \mu_i &= \left(c(\gamma_i) - d\frac{s_c(\gamma_i)}{e}\right) - \left(c(\gamma'_i) - d\frac{s_c(\gamma'_i)}{e}\right) + d(\text{cont}(\gamma_i) - \text{cont}(\gamma'_i))\left(-\frac{r}{e}\right) \end{aligned}$$

la deuxième équation devenant :

$$\mu_i = c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) + d\frac{r \text{cont}(\gamma'_i) + s_{c(\gamma'_i)} - r \text{cont}(\gamma_i) + s_{c(\gamma_i)}}{e}$$

et on obtient finalement :

$$\mu_i \equiv c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) \pmod{d} \quad (4.2.1)$$

$$\mu_i = c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) + d \frac{r[\vartheta(\gamma'_i) - \vartheta(\gamma_i)]}{e} \quad (4.2.2)$$

En particulier, remarquons que (4.2.1) implique que $\mu_i = c(\gamma_i) - c(\gamma'_i) + kd$ pour un entier k et donc par (4.2.2) on obtient que $\frac{r[\vartheta(\gamma'_i) - \vartheta(\gamma_i)]}{e} = k \in \mathbb{Z}$.

On va maintenant chercher à appliquer la proposition précédente en montrant que $\eta(\gamma_i) < \eta(\gamma'_i)$ si $\gamma_i \neq \gamma'_i$. Tout d'abord, remarquons que $\vartheta(\gamma'_i) - \vartheta(\gamma_i) = \text{cont}(\gamma'_i) + \frac{s_{c(\gamma'_i)}}{r} - \text{cont}(\gamma_i) - \frac{s_{c(\gamma_i)}}{r} = \eta(\gamma'_i) + \frac{u_{c(\gamma'_i)}}{r} - \eta(\gamma_i) - \frac{u_{c(\gamma_i)}}{r} = \Delta_i \eta + \frac{\Delta_i u}{r}$ où on a noté $\Delta_i \eta := \eta(\gamma'_i) - \eta(\gamma_i)$ et $\Delta_i u := u_{c(\gamma'_i)} - u_{c(\gamma_i)}$. Ainsi, on obtient l'égalité suivante (avec $\Delta_i c := c(\gamma'_i) - c(\gamma_i)$) :

$$\mu_i = -\Delta_i c + d \frac{r \left(\Delta_i \eta + \frac{\Delta_i u}{r} \right)}{e} = -\Delta_i c + dk$$

Si $\mu_i \geq d$, comme $|\Delta_i c| < d$ on obtient $k \geq 1$ (*) et de $\Delta_i \eta = \frac{ke - \Delta_i u}{r}$ on obtient $\Delta_i \eta > 0$ (rappelons que $|\Delta_i u| < e$).

On suppose maintenant $(0 \leq) \mu < d$.

- Si $\Delta_i c > 0$, l'inégalité (*) reste valide (car $\mu_i \geq 0$) d'où $\Delta_i \eta > 0$ de nouveau.
- Si $\Delta_i c < 0$, comme $\mu_i < d$ on obtient $k \leq 0$; encore une fois, comme $|\Delta_i c| < d$ et que $\mu_i \geq 0$ on a aussi $k \geq 0$ donc finalement $k = 0$. Ainsi, $\Delta_i \eta = -\frac{\Delta_i u}{r} > 0$ car comme $\Delta_i c < 0$ on a $\Delta_i u < 0$ (d'après les conditions sur \mathbf{u} , cf. Section 4.2.1).
- Si $\Delta_i c = 0$ alors $\Delta_i u = \Delta_i t = 0$. Comme $0 \leq \mu_i < d$ on a encore $k = 0$ d'où $\Delta_i \eta = -\frac{\Delta_i u}{r} = 0$. Ainsi, $\Delta_i \text{cont} = \Delta_i \eta - \Delta_i t = 0$ donc γ_i et γ'_i ont le même contenu; avec $c := c(\gamma_i) = c(\gamma'_i)$ on a la distinction de cas suivante.

(i) Si $b(\gamma_i) < b(\gamma'_i)$ alors γ_i est un nœud de λ' , plus précisément une boîte dans le diagramme de Young de $\lambda^{(c)}$: si j est tel que $\gamma_i = \gamma'_j$ on réindexe les nœuds de λ' en permutant γ'_i et γ'_j pour obtenir une indexation $[\lambda'] = \{\tilde{\gamma}'_i\}$ avec $\gamma_i = \tilde{\gamma}'_i$; cela fait bien avancer notre problème puisque $\eta(\gamma'_i) = \eta(\tilde{\gamma}'_i)$ (ces deux nœuds ont même contenu et même c). En effet, le changement d'étiquetage n'affecte pas les nœuds indexés de 1 à $i - 1$ et dans le nouvel étiquetage notre propriété est vérifiée pour le nœud i : notre propriété est donc héréditaire.

(ii) Si $b(\gamma_i) > b(\gamma'_i)$ on fait la même chose mais en réindexant cette fois les éléments de $[\lambda]$.

(iii) Si $b(\gamma_i) = b(\gamma'_i)$ alors $a(\gamma_i) = a(\gamma'_i)$ donc $\gamma_i = \gamma'_i$.

Ainsi, on obtient bien des indexations $[\lambda] = \{\gamma_i\}$ et $[\lambda'] = \{\gamma'_i\}$ telles que $\eta(\gamma_i) < \eta(\gamma'_i)$ si $\gamma_i \neq \gamma'_i$. La proposition précédente nous permet donc de conclure la démonstration du théorème. \square

Finalement, le Théorème 4.2.14 dit exactement que l'ordre établi par la fonction $a_{t,r} : \text{Irr}(W) \rightarrow \mathbb{Z}$ est compatible avec celui qui fait de \mathcal{O}_ψ une catégorie de plus haut poids. De plus, l'égalité (4.1.1) nous garantit que l'ensemble suivant :

$$\mathbf{B} := \{E' \in \text{Irr}(W) : \text{KZ}_\psi(\mathbf{L}_\psi(E')) \neq 0\}$$

est un ensemble basique canonique pour $\text{Irr}(\mathcal{H}_\theta)$, relativement à l'ordre défini par la fonction $a_{t,r}$ (l'ensemble \mathbf{B} est bien en bijection avec $\text{Irr}(\mathcal{H}_\theta)$ d'après [GGOR, Theorem 5.14]).

En particulier, la matrice de décomposition pour \mathcal{H}_θ , donnée par

$$([\text{KZ}_\psi(\Delta_\psi(E)) : \text{KZ}_\psi(\mathbf{L}_\psi(E'))])_{(E,E') \in \text{Irr}(W) \times \mathbf{B}}$$

est la matrice de décomposition $([\Delta_\psi(E) : \mathbf{L}_\psi(E')])_{E,E' \in \text{Irr}(W)}$ pour \mathcal{O}_ψ où l'on enlève les colonnes correspondant aux modules annulés par KZ_ψ .

On a donc justifié l'existence d'ensembles basiques canoniques pour \mathcal{H}_θ , sans avoir recours au théorème d'Ariki. L'idée est de, à partir de ce résultat ainsi que de [CJ, Proposition 2.5] et [GenJ], retrouver de manière simple l'existence d'ensembles basiques canoniques pour les algèbres de Hecke des $G(de, e, n)$ dans les cas où la théorie de Clifford s'applique (pour $n > 2$ ou $n = 2$ avec e impair).

Références

- [Ar] S. ARIKI, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*. Univ. Lecture Series, 26 (2002), AMS.
- [AK] S. ARIKI et K. KOIKE, *A Hecke Algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$ and Construction of Its Irreducible Representations*. Adv. in Math. 106 (1994), 216–243.
- [Be] D. BESSIS, *Zariski theorems and diagrams for braid groups*. Invent. Math., 145 (2001), 487–507.
- [Bou] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*. Hermann, 1968.
- [Br88] M. BROUÉ, *Introduction to Complex Reflection Groups and Their Braid Groups*. Springer, 1988.
- [Br00] M. BROUÉ, *Reflection Groups, Braid Groups, Hecke Algebras, Finite Reductive Groups*. Current Developements in Mathematics (2000), 1–107.

- [BMM] M. BROUÉ, G. MALLE et J. MICHEL, *Generic Blocks of Finite Reductive Groups*. Astérisque 212 (1993), 7–92.
- [BMR] M. BROUÉ, G. MALLE et R. ROUQUIER, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*. J. reine angew. Math. 500 (1998), 127–190.
- [Ch09] M. CHLOUVERAKI, *Blocks and Families for Cyclotomic Hecke Algebras*. Springer, 2009.
- [Ch14] M. CHLOUVERAKI, *Hecke Algebras and Symplectic Reflection Algebras*. À paraître dans MSRI book series, arXiv :1311.7179 (2014).
- [CGG] M. CHLOUVERAKI, I. GORDON et S. GRIFFETH, *Cell modules and canonical basic sets for Hecke algebras from Cherednik algebras*. AMS Contemporary Mathematics, Vol. 562 (2012), 77–89.
- [CJ] M. CHLOUVERAKI et N. JACON, *Schur elements and basic sets for cyclotomic Hecke algebras*. Journal of Algebra and Its Applications, World Scientific Publishing, 2011, 10 (5), 979–993.
- [CR] C. W. CURTIS et I. REINER, *Methods of representation theory* (vol. I). Wiley, New York (1981).
- [DG] C. DUNKL et S. GRIFFETH, *Generalized Jack polynomials and the representation theory of rational Cherednik algebras*. Selecta Math., 16 : 791–818 (2010).
- [FH] W. FULTON et J. HARRIS, *Representation Theory: A First Course*. Springer, 1991.
- [GJ] M. GECK et N. JACON, *Representations of Hecke Algebras at Roots of Unity*. Springer, 2011.
- [GP] M. GECK et G. PFEIFFER, *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori–Hecke Algebras*. Oxford University Press, 2000.
- [GenJ] G. GENET et N. JACON, *Modular representations of cyclotomic Hecke algebras of type $G(r, p, n)$* . Int. Math. Res. Not., (Art. ID 93049) : 18 pp, 2006.
- [GGOR] V. GINZBURG, N. GUAY, E. OPDAM, et R. ROUQUIER. *On the category O for rational Cherednik algebras*. Invent. Math., 154(3) : 617–651, 2003.
- [Gr] S. GRIFFETH, *Orthogonal functions generalizing Jack polynomials*. Trans. Amer. Math. Soc. 362, 6131–6157 (2010).
- [Hum] J. E. HUMPHREYS, *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1990.
- [Ja] N. JACON, *Crystal graphs of higher level q -deformed Fock spaces, Lusztig a -values and Ariki-Koike algebras*. Algebr. Represent. Theory, 10 : 565–591 (2007).

- [Ma] G. MALLE, *On the rationality and fake degrees of characters of cyclotomic algebras*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 6 (1999), 647–677.
- [Rou] R. ROUQUIER, *q -Schur algebras and complex reflection groups*. *Mosc. Math. J.*, 8 (1) : 119–159, 184 (2008).
- [ST] G. C. SHEPHARD et J. A. TODD, *Finite unitary reflection groups*. *Canadian Journal of Mathematics* vol. 6 (1954), 274–304.