Parties infinies au jeu de la bataille

Salim Rostam

27 juin 2012

Théorème. *Soit $n \geqslant 2$ un entier tel que n et $\frac{n}{3}$ ne soient pas des puissances de 2. Alors il existe des parties infinies pour la bataille à n cartes et une seule couleur.*

Remarque. La condition est équivalente à ce que n soit de la forme $m \cdot 2^k$ avec $k \geqslant 1$ et $m > 3$ impair.

Avant de donner la démonstration, je vais définir par récurrence des « blocs » qui vont nous être utile. Dans toute la suite, les étiquettes $x_i \subset \mathbb{N}$ dont il sera question vérifient :

- $\min i = 1$ et $\min x_1 = 1$;
- pour chaque i, x_i est un intervalle borné de $\mathbb{N}$;
- pour chaque $i < i_{\max}, \max x_i = \min x_{i+1} - 1$;
- si deux coefficients n et m d'une matrice ont pour étiquette x_i, alors $n \neq m$.

Il faut remarquer que les cardinaux des ensembles x_i ne sont pas fixes, ainsi que $i_{\max}$. Dans la suite, les coefficients des matrices seront données par leur étiquettes. Ainsi, si une étiquette x_i rencontre une étiquette x_j avec $i < j$, alors c'est l'étiquette x_j qui l'emporte.

Définition. On définit $B_0 = (x_1)$ et pour $k \geqslant 0, B_{k+1}$ est défini par $B_{k+1} = B_k^+ :: B_k$ où :: représente l'opérateur de concaténation et B_k^+ désigne la matrice B_k où tous les indices i des x_i ont été incrémentés de 1.

Remarque. Un bloc B_k est de longueur 2^k.

Lemme. *Si B_k^+ rencontre B_k en duel, alors B_k^+ gagne les 2^k duels et son tas devient $B_k^+ :: B_k$.*

Remarque. Attention, ce ne sont pas les même blocs au départ et à l'arrivée !

Remarque. Ce lemme prouve qu'une position où l'un des tas est vide et où l'autre est un $B_{k\geqslant 1}$ est issue d'une position initiale ; il suffit d'écrire $B_k = B_{k-1}^+ :: B_{k-1}$ et d'appliquer le lemme à l'envers.

Démonstration. Par récurrence sur k.

- Initialisation. On va vérifier la propriété pour $k = 0$. On a :

$$\begin{pmatrix} B_0^+ \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^+ & B_0 \\ & \end{pmatrix}$$

C'est gagné !

– Hérédité. On suppose que la propriété est vraie au rang $k \geqslant 0$. Remarquons les deux choses suivantes.
  – $B_{k+1}^{+} = (B_k^{+} :: B_k)^{+} = B_k^{++} :: B_k^{+}$ où $B_k^{++} = (B_k^{+})^{+}$.
  – Si B_k^{++} rencontre B_k^{+} en duel, alors B_k^{++} remporte les 2^k duels et son tas devient $B_k^{++} :: B_k^{+}$. En effet, il suffit de suivre le duel entre B_k^{+} et B_k (on utilise l'hypothèse de récurrence) et d'augmenter tous les indices de 1.

  On a donc :

$$\begin{pmatrix} B_{k+1}^{+} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k^{++} & B_k^{+} \\ B_k^{+} & B_k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B_k^{+} & B_k^{++} & B_k^{+} \\ B_k & & \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} B_k^{++} & B_k^{+} & B_k^{+} & B_k \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{k+1}^{+} & B_{k+1} \\ & \end{pmatrix}$$

Par récurrence, le lemme est donc démontré ! □

Démonstration du théorème. On pose $n = m \cdot 2^k$ où k est un entier non nul et $m > 3$ un entier impair.

– Premier cas : $m \equiv 1[4]$. On considère la position suivante :

$$\begin{pmatrix} B_k^{+} & B_k & \dots & B_k^{+} & B_k & \\ B_k & B_k^{+} & \dots & B_k & B_k^{+} & B_k \end{pmatrix};$$

  elle est bien issue d'une position initiale (d'après une remarque précédente). Il y a m blocs : c'est bien une position de bataille à $n = m \cdot 2^k$ cartes. En faisant se confronter les deux premiers blocs on a :

$$\begin{pmatrix} B_k & \dots & B_k^{+} & B_k & B_k^{+} & B_k \\ B_k^{+} & \dots & B_k & B_k^{+} & B_k & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k & B_k^{+} & \dots & B_k & B_k^{+} & B_k \\ B_k^{+} & B_k & \dots & B_k^{+} & B_k & \end{pmatrix}$$

  puis :

$$\begin{pmatrix} B_k^{+} & \dots & B_k & B_k^{+} & B_k & \\ B_k & \dots & B_k^{+} & B_k & B_k^{+} & B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k^{+} & B_k & \dots & B_k^{+} & B_k & \\ B_k & B_k^{+} & \dots & B_k & B_k^{+} & B_k \end{pmatrix}.$$

  On retrouve le même type de position que celle de départ : la partie ne se termine jamais et est donc périodique.

– Deuxième cas : $m \equiv -1[4]$. On considère la position suivante :

$$\begin{pmatrix} B_k & B_k^{+} & \dots & B_k & \\ B_k^{+} & B_k & \dots & B_k^{+} & B_k \end{pmatrix};$$

  elle est bien issue d'une position initiale. Il y a m blocs : c'est bien une position de bataille à $n = m \cdot 2^k$ cartes. En faisant se confronter les deux premiers blocs on a :

$$\begin{pmatrix} B_k^{+} & \dots & B_k & & & \\ B_k & \dots & B_k^{+} & B_k & B_k^{+} & B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k^{+} & B_k & \dots & B_k^{+} & B_k & & & \\ B_k & B_k^{+} & \dots & B_k & B_k^{+} & B_k & B_k^{+} & B_k \end{pmatrix}$$

puis :

$$\begin{pmatrix} B_k & \dots & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k & \\ B_k^+ & \dots & B_k & B_k^+ & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k & B_k^+ & \dots & B_k & \\ B_k^+ & B_k & \dots & B_k^+ & B_k \end{pmatrix}.$$

On retrouve le même type de position que celle de départ : la partie ne se termine jamais et est donc périodique.

□

Remarque. On ne peut pas appliquer la même méthode pour les cas $n = 2^k$ ou $n = 3 \cdot 2^k$. Dans le dernier cas par exemple, le seul cas non trivial est :

$$\begin{pmatrix} B_k^+ & \\ B_k & B_k^+ \end{pmatrix}$$

et on voit que ça ne marche plus.

Remarque. Parmi les conjectures précédentes, l'une d'entre elle est vraie : il y a des parties infinies pour $n = 20 + 8k = (5 + 2k) \cdot 2^2$ (on « comprend » maintenant pourquoi il n'y en a pas pour $n = 12 = 3 \cdot 2^2$). En revanche, pour $n = 5 \cdot 2^3 = 40$ (multiple de 8) il existe des parties infinies ; on en donnera un exemple à la fin.

On peut essayer de raffiner les périodicités précédentes. Tout d'abord, ce sont des périodicités multiples $+2^k/-2^k$: de plus, quelques résultats sur les étiquettes des blocs B_k vont nous permettre de baisser la borne de $n!$.

Définition. On note $c_{l,k}$ le nombre d'étiquettes x_l dans un bloc B_k ; de même, $c_{l,k}^+$ désigne le nombre d'étiquettes x_l dans un bloc B_k^+.

On peut voir que $\forall k \geqslant 1, c_{1,k} = 1, c_{0,k} = 0$ ainsi que $\forall l > k + 1, c_{l,k} = 0$. La dernière égalité se démontre très facilement par récurrence ; il suffit en fait de constater le résultat pour $k = 1$ où B_k est réduit à $(x_2\ x_1)$. De plus, on a $c_{l,k}^+ = c_{l-1,k}$. Ainsi, de la relation $B_{k+1} = B_k^+ :: B_k$ on tire la formule suivante :

$$\forall l, k \geqslant 0, c_{l,k+1} = c_{l,k}^+ + c_{l,k} = c_{l-1,k} + c_{l,k}.$$

En faisant l'analogie avec :

$$\forall k \geqslant 0, \binom{k}{0} = 1$$
$$\forall l > k, \binom{k}{l} = 0$$
$$\forall l, k \geqslant 0, \binom{k+1}{l+1} = \binom{k}{l} + \binom{k}{l+1}$$

on s'aperçoit que :

$$\forall l, k \geqslant 1, c_{l,k} = \binom{k}{l-1}.$$

Finalement, le nombre de blocs B_k possibles est $\prod_l (c_{l,k}!)$; c'est déjà sensiblement moins que les $2^k!$ possibilités que l'on a « brutalement ». À titre d'exemples, le rapport entre les deux pour $k = 3$ est de l'ordre de 10^{-4}, pour $k = 5$ de l'ordre de 10^{-19} et pour $k = 10$ de l'ordre de 10^{-824} (note [1]).

Si maintenant on s'intéresse à la périodicité que l'on obtient sur le premier modèle de partie infinie précédent par exemple, le nombre de positions de la forme :

$$\begin{pmatrix} B_k^+ & B_k & \dots & B_k^+ & B_k & \\ B_k & B_k^+ & \dots & B_k & B_k^+ & B_k \end{pmatrix}$$

(cas $m \equiv 1[4]$) est majoré par :

$$\prod_l \left[\left(\underbrace{\frac{m-1}{2} c_{l,k}^+ + \frac{m+1}{2} c_{l,k}}_{\text{nombre d'étiquettes } x_l} \right)! \right] = \prod_l \left[\left(\frac{m-1}{2} \binom{k}{l-2} + \frac{m+1}{2} \binom{k}{l-1} \right)! \right]$$

$$\leqslant \prod_l \left(\left[\frac{m+1}{2} \binom{k+1}{l-1} \right]! \right)$$

Cette borne est encore une fois bien meilleure que $(m \cdot 2^k)!$: à titre de comparaison, voici quelques ordres de grandeurs du rapport (après composition par $-\log$).

$m \backslash k$	1	2	3	5
5	3	6	14	58
7	4	10	22	98

Remarque. La quantité suivante :

$$\prod_l \left[\left(\frac{m-1}{2} \binom{k}{l-2} + \frac{m+1}{2} \binom{k}{l-1} \right) \right]$$

est sans doute une approximation (majoration ?) satisfaisante de la vraie périodicité : on considère qu'il n'y a qu'un seul cycle de permutation des coefficients à l'intérieur des ensembles x_i. Cette hypothèse n'a *a priori* pas de raison d'être vérifiée (elle est par exemple fausse pour $n = 9 \times 2^2$), mais étant donné que l'on prend le produit et non le ppcm cela peut compenser.

Pour finir, on peut donner un exemple de partie infinie dans le cas $n = 40 = 5 \times 8$. On va donc partir de :

$$\begin{pmatrix} B_3^+ & B_3 & \\ B_3 & B_3^+ & B_3 \end{pmatrix}$$

avec $B_3 = (x_4\ x_3\ x_3\ x_2\ x_3\ x_2\ x_2\ x_1)$. D'après une formule précédente, l'étiquette x_l apparait $2\binom{3}{l-2} + 3\binom{3}{l-1}$. On a donc les effectifs suivants :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	11	15	9	2

1. Je n'ai pas réussi à trouver de majoration correcte.

et on prend donc :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= [\![1, 3]\!] \\
x_2 &= [\![4, 14]\!] \\
x_3 &= [\![15, 29]\!] \\
x_4 &= [\![30, 38]\!] \\
x_5 &= [\![39, 40]\!]
\end{aligned}
$$

On considère alors la position suivante :

$$
\begin{pmatrix}
40 & 38 & 37 & 29 & 36 & 28 & 27 & 14 & 35 & 26 & 25 & 13 & 24 & 12 & 11 & 3 & & & & & & & & \\
34 & 23 & 22 & 10 & 21 & 9 & 8 & 2 & 39 & 33 & 32 & 20 & 31 & 19 & 18 & 7 & 30 & 17 & 16 & 6 & 15 & 5 & 4 & 1
\end{pmatrix}
$$

(note [2]). On remarque que l'on obtient de nouveau cette position après 7920 coups ! C'est quand même beaucoup plus petit que la borne, améliorée, que l'on avait établie : elle vaut ici $2!9!15!11!3! \sim 10^{26}$ (contre $40! \sim 10^{47}$ tout de même) ! L'autre quantité suggérée, $2 \times 9 \times 15 \times 11 \times 3$, vaut 8910 et on voit qu'ici elle est assez proche de la période.

2. J'ai rempli d'abord la première ligne (de gauche à droite) puis la deuxième ligne (idem) en mettant en premier les éléments les plus grands des classes.