Groupe de lecture : représentations irréductibles du groupe symétrique

Séance introductive : correspondance de Robinson–Schensted

Salim Rostam

Mardi 3 septembre 2019

1 Correspondance de Robinson–Schensted

Craig Schensted (maintenant Ea Ea...) [Sag, §3].

1.1 Insertion de Schensted

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À partir d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on va construire deux « tableaux » P et Q de même forme (cases numérotées alignées à gauche). On part de la paire de tableaux vide et on fait la procédure suivante. À l'étape $i \in \{1, \dots, n\}$, on regarde dans la première ligne de P l'ensemble des cases $> \sigma(i)$. Si cet ensemble est vide, on place $\sigma(i)$ en bout de ligne et sinon, si k est la plus petite de ces cases, on remplace k par $\sigma(i)$ et on fait la même chose pour la ligne d'en-dessous pour l'entier k. La case rajoutée dans P est alors recopiée dans Q, avec cette fois le numéro i.

Par exemple, avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, les étapes sont les suivantes (la flèche horizontale signifiant l'insertion).

Insertion de $\sigma(1) = 3$. C'est la première étape, donc on a juste $P = 3$ et $Q = 1$.

Insertion de $\sigma(2) = 1$. On rajoute 1 dans la première ligne de P. Le 3 est éjecté et se retrouve donc dans la deuxième ligne :

$$3 \quad \leftarrow \quad 1$$

donc

$$P = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

On met donc à jour Q avec l'entrée 2 là où se trouve la nouvelle case de P (c'est-à-dire celle qui contient 3) :

$$Q = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Insertion de $\sigma(3) = 5$. On rajoute 5 dans la première ligne de $P = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$. Ici toutes les entrées de la première ligne sont < 5 donc le 5 est simplement ajouté en fin de ligne :

$$\begin{matrix} 1 & \leftarrow & 5 \\ 3 & & \end{matrix}$$

donc

$$P = \begin{matrix} 1 & 5 \\ 3 & \end{matrix}$$

La nouvelle case de P est celle du 5, donc on rajoute à cet endroit la case 3 pour Q, qui devient donc

$$Q = \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}$$

Insertion de $\sigma(4) = 7$. C'est la même situation qu'avant, on obtient donc

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 5 & 7 \\ 3 & & \end{array} \qquad\qquad Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4. \\ 2 & & \end{array}$$

Insertion de $\sigma(5) = 4$. Les cases plus grandes que 4 sur la première ligne de P sont 5 et 7, c'est donc 5 (la plus petite) qui est remplacée par 4. On insère donc 5 sur la deuxième ligne, et on l'y ajoute juste à la fin puisque 5 est le plus grand élément. On obtient :

$$\begin{array}{llll} 1 & 5 & 7 & \leftarrow 4 \\ 3 & & & \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{llll} 1 & 4 & 7 & \\ 3 & & & \leftarrow 5 \end{array}$$

donc

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & \end{array}$$

La case ajoutée est celle du 5, elle se rajoute donc sur Q avec ici le même numéro :

$$Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \end{array}$$

Insertion de $\sigma(6) = 6$. On insère le 6 dans la première ligne, le 7 est éjecté et est ajouté directement dans la deuxième ligne car c'est le plus grand élément :

$$\begin{array}{lllll} 1 & 4 & 7 & \leftarrow & 6 \\ 3 & 5 & & & \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{llll} 1 & 4 & 6 & \\ 3 & 5 & & \leftarrow 7 \end{array}$$

donc

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{array}$$

La case ajoutée est celle du 7, elle se rajoute donc sur Q avec le numéro 6 :

$$Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{array}$$

Insertion de $\sigma(7) = 2$. On insère le 2 dans la première ligne, qui sort le 4 que l'on insère donc sur la deuxième ligne ; il sort le 5 que l'on place sur la troisième ligne :

$$\begin{array}{llll} 1 & 4 & 6 & \leftarrow 2 \\ 3 & 5 & 7 & \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 6 & \\ 3 & 5 & 7 & \leftarrow 4 \end{array}$$

donc

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{array}$$

La nouvelle case est celle du 5, donc cette case se rajoute dans Q avec le numéro 7 :

$$Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{array}$$

Finalement, à la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ on a associé la paire

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{array} \qquad\qquad Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{array}$$

1.2 Autre exemple

(Tout le monde en fait un.) Prenons maintenant $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. On obtient successivement pour P

$$2$$

puis

$$\begin{array}{ll} 2 & 7 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ll} 2 & 7 \end{array} \leftarrow 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{ll} 1 & 7 \\ 2 & \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ll} 1 & 7 \\ 2 & \end{array} \leftarrow 5 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{ll} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ll} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{array} \leftarrow 3 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{lll} 1 & 3 & \\ 2 & 7 & \leftarrow 5 \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{ll} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lll} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & \\ 7 & & \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lll} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & \\ 7 & & \end{array} \leftarrow 4 \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{array}$$

ainsi

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{array}$$

puis

$$Q = \begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{matrix}$$

La paire associée à $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ est donc

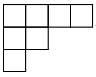
$$P = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{matrix} \qquad\qquad Q = \begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{matrix}$$

Remarque 1.1. Le lien avec la paire (P, Q) de la partie précédente est clair ; mais quel est le lien entre σ' et σ ?

1.3 Inversion

Définition 1.2. Une *partition* de n est une suite $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h \geq 1)$ décroissante d'entiers de somme n. On note $\lambda \vdash n$.

Exemple 1.3. $(4, 2, 1) \vdash 7$.

On peut représenter une partition $\lambda \vdash n$ par un *diagramme de Young* : c'est un tableau avec λ_i cases dans la ligne i, où les cases sont alignées à gauche. Par exemple, le diagramme de Young correspondant à la partition $(4, 2, 1) \vdash 7$ de l'exemple précédent est .

Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la paire (P, Q) que l'on obtient est formée de deux *tableaux de Young standards* de même forme $\lambda \vdash n$: *tableaux de Young* de forme λ au sens où l'on met les entiers $1, \ldots, n$ dans le diagramme de Young de λ, et *standard* au sens où les étiquettes sont croissantes suivant les lignes et les colonnes. Réciproquement, à l'aide du tableau Q on voit qu'étant donnée une paire de tableaux de Young standards de même forme on peut associer une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On obtient ainsi une correspondance

$$\mathfrak{S}_n \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \mathrm{Std}(\lambda) \times \mathrm{Std}(\lambda),$$

où $\mathrm{Std}(\lambda)$ est l'ensemble des tableaux de Young standards de forme $\lambda \vdash n$.

La correspondance avait été auparavant établie par Gilbert Robinson (1906–1992) en 1938.

2 Théorie des représentations

En passant au cardinal dans la correspondance précédente, on trouve

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} \#\mathrm{Std}(\lambda)^2$$

L'objectif, comme souvent en algèbre, est de trouver une raison plus « conceptuelle » à l'égalité précédente. Pour chaque $\lambda \vdash n$, un $\#\mathrm{Std}(\lambda)$ va être la dimension d'une *représentation irréductible* de $\mathfrak{S}_n$ et l'autre $\#\mathrm{Std}(\lambda)$ va être sa multiplicité dans la *représentation régulière* de $\mathfrak{S}_n$.

L'objectif de ce groupe de travail est, après une rapide introduction à la théorie des représentations d'un groupe fini, de construire les représentations irréductibles (qui sont les « nombres premiers » des représentations) du groupe symétrique, cela d'une façon combinatoire. Les deux ingrédients essentiels seront la théorie (élémentaire) des modules ainsi que des objets combinatoire appelés « tabloïdes » (qui ressemble aux tableaux de Young standards).

Si G est un groupe, une *représentation* est un espace vectoriel V sur lequel G agit (avec quelques axiomes naturels), de sorte que l'on a un morphisme de groupes

$$G \to \mathrm{GL}(V).$$

Un intérêt est par exemple que l'on peut par exemple parler de la trace d'un élément de G par rapport à cette représentation (et c'est très utile dans cette théorie). Dans le langage de la *théorie des modules* ($\approx$ espaces vectoriels sur des anneaux), on dit que V est un $\mathbb{C}[G]$-module. En fait, on peut voir la notation $g \cdot v$ comme l'action de $g \in G$ sur v (en tant qu'action de groupe) ou alors comme l'action du « scalaire » g (dans l'anneau $\mathbb{C}[G]$) sur v.

Applications de la théorie des représentations en général : théorème de Burside (résultat purement théorie des groupes), décomposition en irréductibles du déterminant d'une table de multiplication d'un groupe, mais aussi par exemple cryptographie et cristallographie.

Références

[Sag] B. E. Sagan, *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions* (second edition). Graduate Texts in Mathematics, Springer (2001).