Groupe de lecture : représentations irréductibles du groupe symétrique

Sacha Quayle, P-M. Desbouchages

ENS Rennes

22 septembre 2021

Sommaire

Definition (Représentation d'un groupe fini)

Une **représentation d'un groupe fini** G est la donnée d'un couple (π, V) où :

1. V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie,
2. $\pi : G \to GL(V)$ est un morphisme de groupes.

On dit qu'une telle application π donne à V la structure d'un G-**module**.
La dimension de V est parfois appelée le **degré de** π.

Definition (Représentation d'un groupe fini)

Une **représentation d'un groupe fini** G est la donnée d'un couple (π, V) où :

1. V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie,
2. $\pi : G \to GL(V)$ est un morphisme de groupes.

On dit qu'une telle application π donne à V la structure d'un G-**module**.
La dimension de V est parfois appelée le **degré de** π.

Remarque

Par simplicité, on notera souvent $g \cdot v$ ou gv au lieu de $(\pi(g))(v)$ pour $g \in G$ et $v \in V$.
Ainsi, on dira que V *est une représentation de* G.

Exemples :

1. Soit G un groupe fini et $V := \mathbb{C}$. On considère le morphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ défini par, pour tout $g \in G$, $\pi(g) := \mathrm{id}_V : V \to V$. C'est la **représentation triviale de** G et on la note triv.

Exemples :

1. Soit G un groupe fini et $V := \mathbb{C}$. On considère le morphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ défini par, pour tout $g \in G$, $\pi(g) := \mathrm{id}_V : V \to V$. C'est la **représentation triviale de** G et on la note triv.
2. Soit $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $V := \mathbb{C}$. On considère le morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ défini par

$$\rho(\overline{0}) = \mathrm{id}_V \quad \text{et} \quad \rho(\overline{1}) = -\mathrm{id}_V.$$

On a ainsi une représentation complexe de G de dimension 1.

Exemples :

1. Soit G un groupe fini et $V := \mathbb{C}$. On considère le morphisme de groupes $\pi : G \to \mathrm{Aut}(V)$ défini par, pour tout $g \in G$, $\pi(g) := \mathrm{id}_V : V \to V$.
   C'est la **représentation triviale de** G et on la note triv.
2. Soit $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $V := \mathbb{C}$. On considère le morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ défini par
   $$\rho(\overline{0}) = \mathrm{id}_V \quad \text{et} \quad \rho(\overline{1}) = -\mathrm{id}_V.$$
   On a ainsi une représentation complexe de G de dimension 1.
3. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $V := \mathbb{C}^n$. On considère le morphisme de groupes
   $$\left| \begin{array}{cccc} \mu : & G & \to & \mathrm{Aut}(V) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ & A & \mapsto & A \end{array} \right.$$
   On définit ainsi une représentation de G de dimension n.

Exemple :
Soit $n \geqslant 2$. On va définir deux représentations de $\mathfrak{S}_n$.

1. On définit un morphisme de groupes

$$\left| \begin{array}{cccc} \rho : & \mathfrak{S}_n & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \mapsto & (\varepsilon(\sigma)). \end{array} \right.$$

   On appelle **représentation signature de** $\mathfrak{S}_n$ le couple $(\rho, \mathbb{C})$.

Définitions et premières propriétés

Exemple :
Soit $n \geqslant 2$. On va définir deux représentations de $\mathfrak{S}_n$.

1. On définit un morphisme de groupes

$$\left| \begin{array}{llll} \rho : & \mathfrak{S}_n & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \mapsto & (\varepsilon(\sigma)). \end{array} \right.$$

   On appelle **représentation signature de** $\mathfrak{S}_n$ le couple $(\rho, \mathbb{C})$.

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit la *matrice de permutation de* σ par

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad (M_\pi)_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(j) = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On définit ainsi un morphisme de groupes

$$\left| \begin{array}{llll} \nu : & \mathfrak{S}_n & \to & \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ & \pi & \mapsto & M_\pi . \end{array} \right.$$

   On appelle **représentation matricielle de** $\mathfrak{S}_n$ le couple $(\nu, \mathbb{C}^n)$.

Definition (Sous-représentation)

Soit (π, V) une représentation d'un groupe fini G. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V.
On dit que (π, W) **est une sous-représentation de** (π, V) si W est invariant sous l'action de G i.e. pour tout $g \in G$, on a $\pi(g)(W) \subset W$

Définitions et premières propriétés

Definition (Sous-représentation)

Soit (π, V) une représentation d'un groupe fini G. Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V.
On dit que (π, W) **est une sous-représentation de** (π, V) si W est invariant sous l'action de G i.e. pour tout $g \in G$, on a $\pi(g)(W) \subset W$

Proposition

Une sous-représentation d'une représentation d'un groupe fini G est elle-même une représentation de G.

Definition (Représentation irréductible)

Une représentation est dite **irréductible** si elle n'admet pas de sous-représentation propre non triviale.

Definition (Représentation irréductible)

Une représentation est dite **irréductible** si elle n'admet pas de sous-représentation propre non triviale.

Exemple :

Toute représentation de dimension 1 est irréductible.

Definition (Morphisme de représentation)

Un **morphisme de représentations** φ entre deux représentations (π, V) et (ρ, W) d'un groupe fini G est une application linéaire $\varphi : V \to W$ telle que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ W \arrow[r, "\rho(g)"'] & W \end{tikzcd}$$

commute pour tout $g \in G$ *i.e.*

$$\varphi \circ \pi(g) = \rho(g) \circ \varphi, \quad \forall g \in G.$$

Définitions et premières propriétés

Definition (Morphisme de représentation)

Un **morphisme de représentations** φ entre deux représentations (π, V) et (ρ, W) d'un groupe fini G est une application linéaire $\varphi : V \to W$ telle que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ W \arrow[r, "\rho(g)"'] & W \end{tikzcd}$$

commute pour tout $g \in G$ *i.e.*

$$\varphi \circ \pi(g) = \rho(g) \circ \varphi, \quad \forall g \in G.$$

Proposition

Soit (π, V), (ρ, W) deux représentations d'un groupe fini G. Soit $\varphi : V \to W$ un morphisme de représentations.
Alors $(\pi, \mathrm{Ker}(\varphi))$ et $(\rho, \mathrm{Im}(\varphi))$ sont des sous-représentations de (π, V) et (ρ, W) respectivement.

Exemple :
Soit $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $V := \mathbb{C}^2$. On définit une représentation (π, V) de G de dimension 2 par

$$\pi(\bar{0}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pi(\bar{1}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a une application linéaire

$$\left| \begin{array}{cccc} T: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^2 \\ & \lambda & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

qui est un morphisme de représentations de triv dans (π, V).

Proposition

Soit $(\pi, V), (\rho, W)$ deux représentations d'un groupe fini G. Alors :

1. la *somme directe* $(\mu, V \oplus W)$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$

$$\mu(g) := (\pi(g), \rho(g)) \in \mathrm{Aut}(V \oplus W),$$

Proposition

Soit $(\pi, V), (\rho, W)$ deux représentations d'un groupe fini G. Alors :

1. la *somme directe* $(\mu, V \oplus W)$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$
$$\mu(g) := (\pi(g), \rho(g)) \in \mathrm{Aut}(V \oplus W),$$
2. le *produit tensoriel* $(\nu, V \otimes W)$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$, pour tout $(v, w) \in V \times W$
$$\nu(g)(v \otimes w) := \pi(g)(v) \otimes \rho(g)(w),$$

Définitions et premières propriétés

Proposition

Soit $(\pi, V), (\rho, W)$ deux représentations d'un groupe fini G. Alors :

1. la *somme directe* $(\mu, V \oplus W)$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$
$$\mu(g) := (\pi(g), \rho(g)) \in \mathrm{Aut}(V \oplus W),$$
2. le *produit tensoriel* $(\nu, V \otimes W)$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$, pour tout $(v, w) \in V \times W$
$$\nu(g)(v \otimes w) := \pi(g)(v) \otimes \rho(g)(w),$$
3. le *dual* (π^*, V^*) est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$
$$\pi^*(g) := {}^t\pi(g^{-1}) : V^* \to V^*,$$

Proposition

Soit $(\pi, V), (\rho, W)$ deux représentations d'un groupe fini G. Alors :

1. la *somme directe* $(\mu, V \oplus W)$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$
$$\mu(g) := (\pi(g), \rho(g)) \in \mathrm{Aut}(V \oplus W),$$
2. le *produit tensoriel* $(\nu, V \otimes W)$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$, pour tout $(v, w) \in V \times W$
$$\nu(g)(v \otimes w) := \pi(g)(v) \otimes \rho(g)(w),$$
3. le *dual* (π^*, V^*) est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$
$$\pi^*(g) := {}^{\mathrm{t}}\pi(g^{-1}) : V^* \to V^*,$$
4. le couple $(\omega, \mathrm{Hom}(V, W))$ est une représentation de G avec, pour tout $g \in G$, pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$$(\omega(g)(\varphi))(v) := \rho(g) \left(\varphi \left(\pi(g^{-1})(v)\right)\right), \quad v \in V.$$

Sommaire

G-modules, représentation par permutation

Proposition

Soit G un groupe fini et V un espace vectoriel complexe de dimension finie. On se donne une application

$$\left|\begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, v) & \mapsto & g \cdot v \end{array}\right.$$

vérifiant

1. $\forall v \in V, \quad 1_G \cdot v = v,$
2. $\forall v \in V, \forall g, h \in G, \quad g \cdot (h \cdot v) = (gh) \cdot v,$
3. $\forall v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall g \in G, \quad g \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda(g \cdot v) + \mu(g \cdot w).$

Alors, ceci équivaut à se donner une représentation de G.

G-modules, représentation par permutation

Construction de la représentation par permutations
Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble $S = \{s_1, ..., s_n\}$. On considère l'espace vectoriel engendré par S

$$\mathbb{C}S := \{\lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n, \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\}.$$

On étend l'action de G sur S par linéarité en une action de G sur $\mathbb{C}S$ de la manière suivante

$$g \cdot (\lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n) := \lambda(g \cdot s_1) + ... + \lambda_n(g \cdot s_n).$$

On a ainsi fait de $\mathbb{C}S$ un G-module de dimension $\mathrm{Card}(S)$.

G-modules, représentation par permutation

Construction de la représentation par permutations
Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble $S = \{s_1, ..., s_n\}$. On considère l'espace vectoriel engendré par S

$$\mathbb{C}S := \{\lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n, \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\}.$$

On étend l'action de G sur S par linéarité en une action de G sur $\mathbb{C}S$ de la manière suivante

$$g \cdot (\lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n) := \lambda(g \cdot s_1) + ... + \lambda_n(g \cdot s_n).$$

On a ainsi fait de $\mathbb{C}S$ un G-module de dimension $\mathrm{Card}(S)$.

Definition

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini S. On appelle le G-module noté $\mathbb{C}S$ construit ci-dessus la **représentation par permutations de G associée à S**.
De plus, les éléments de S forment une base de $\mathbb{C}S$, appelée **base standarde**.

G-modules, représentation par permutation

Exemple :
On considère l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $S := \{1, ..., n\}$. Maintenant, on sait que $\mathbb{C}S$ est un $\mathfrak{S}_n$-module muni de l'action

$$\sigma \cdot (\lambda_1 1 + ... \lambda_n n) = \lambda_1 \sigma(1) + ... + \lambda_n \sigma(n),$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

G-modules, représentation par permutation

Exemple :
On considère l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $S := \{1, ..., n\}$. Maintenant, on sait que $\mathbb{C}S$ est un $\mathfrak{S}_n$-module muni de l'action

$$\sigma \cdot (\lambda_1 1 + ...\lambda_n n) = \lambda_1 \sigma(1) + ... + \lambda_n \sigma(n),$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
On va expliciter le cas $n = 3$ pour plus de clarté. Soit $S := \{1, 2, 3\}$.
On se donne $\tau := (1\ 2)$ et $\sigma := (1\ 3\ 2)$. Alors, dans la base $\mathcal{B} := (1, 2, 3)$ de $\mathbb{C}S$, on a les matrices suivantes

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple :
On considère l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur l'ensemble $S := \{1, ..., n\}$. Maintenant, on sait que $\mathbb{C}S$ est un $\mathfrak{S}_n$-module muni de l'action

$$\sigma \cdot (\lambda_1 1 + ... \lambda_n n) = \lambda_1 \sigma(1) + ... + \lambda_n \sigma(n),$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
On va expliciter le cas $n = 3$ pour plus de clarté. Soit $S := \{1, 2, 3\}$.
On se donne $\tau := (1\ 2)$ et $\sigma := (1\ 3\ 2)$. Alors, dans la base $\mathcal{B} := (1, 2, 3)$ de $\mathbb{C}S$, on a les matrices suivantes

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque

On peut montrer que les matrices des représentations matricielle et par permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont identiques.

G-modules, représentation par permutation

On va maintenant construire la **représentation régulière** d'un groupe fini. Soit $G := \{g_1, ..., g_n\}$ un groupe fini et $S := G$. G agit sur lui-même par translation à gauche via l'action

$$\left| \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & gh. \end{array} \right.$$

On peut ainsi définir le G-module suivant

$$\mathbb{C}[G] = \{\lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n, \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}\}$$

appelé **l'algèbre de groupe de** G. C'est une algèbre où la multiplication est donnée par $g_i g_j = g_k$ dans $\mathbb{C}[G]$ si $g_i g_j = g_k$ dans G et par linéarité. On exprime l'action de G sur un élément quelconque de $\mathbb{C}[G]$ par

$$g \cdot (\lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n) := \lambda_1 (g g_1) + ... + \lambda_n (g g_n), \quad \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C} \quad g \in G.$$

Sommaire

Réductibilité complète, lemme de Schur

Definition

Une représentation V est dite **indécomposable** si elle ne peut pas être exprimée comme somme directe d'autres représentations.

Réductibilité complète, lemme de Schur

Definition

Une représentation V est dite **indécomposable** si elle ne peut pas être exprimée comme somme directe d'autres représentations.

Proposition

Une représentation est irréductible si et seulement si elle est indécomposable.

Réductibilité complète, lemme de Schur

Definition

Une représentation V est dite **indécomposable** si elle ne peut pas être exprimée comme somme directe d'autres représentations.

Proposition

Une représentation est irréductible si et seulement si elle est indécomposable.

Proposition

Soit W une sous-représentation d'une représentation V. Alors il existe une sous-représentation W' de V telle que $V = W \oplus W'$.

Réductibilité complète, lemme de Schur

Definition

Une représentation V est dite **indécomposable** si elle ne peut pas être exprimée comme somme directe d'autres représentations.

Proposition

Une représentation est irréductible si et seulement si elle est indécomposable.

Proposition

Soit W une sous-représentation d'une représentation V. Alors il existe une sous-représentation W' de V telle que $V = W \oplus W'$.

Corollaire

Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

Réductibilité complète, lemme de Schur

Théorème

Toute représentation V d'un groupe fini G se décompose sous la forme

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus ... \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

où les V_i sont des représentations irréductibles non isomorphes, chacune apparaissant avec la multiplicité a_i. Cette décomposition est de plus unique à isomorphisme près, c'est à dire au remplacement près des Vi par des représentations irréductibles qui leur sont isomorphes.

Réductibilité complète, lemme de Schur

Théorème

Toute représentation V d'un groupe fini G se décompose sous la forme

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus ... \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

où les V_i sont des représentations irréductibles non isomorphes, chacune apparaissant avec la multiplicité a_i. Cette décomposition est de plus unique à isomorphisme près, c'est à dire au remplacement près des Vi par des représentations irréductibles qui leur sont isomorphes.

Lemme (lemme de Schur)

Soient V et W deux représentations irréductibles de G, et $\varphi : V \to W$ un morphisme de représentations. Alors :

1. φ est soit un isomorphisme, soit nul.
2. Si $V = W$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \lambda.Id$

Exemples

Contre-exemple lorsque le groupe G n'est pas fini.

Sur $(\mathbb{R},+)$ avec $V=\mathbb{R}^2$ on considère la représentation (ρ, V) définie par $\rho(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}$. Alors W est une sous-représentation de V mais ne possède pas de sous-représentation supplémentaire.

Exemples

Contre-exemple lorsque le groupe G n'est pas fini.

Sur $(\mathbb{R}, +)$ avec $V = \mathbb{R}^2$ on considère la représentation (ρ, V) définie par $\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Alors W est une sous-représentation de V mais ne possède pas de sous-représentation supplémentaire.

Exemple de décomposition en représentations irréductibles.

Sur $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $V := \mathbb{C}^2$ on considère la représentation définie par
$\rho(\bar{0}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(\bar{1}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $V = W \oplus W'$, où $W = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $W' = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ sont des sous-représentations de V.

Sommaire

Groupes abéliens

Remarque

Pour toute représentation (ρ, V) d'un groupe G et tout $g \in G$, $\rho(g)$ correspond à une application linéaire bijective $V \to V$. C'est un morphisme de représentations si $g \in Z(G)$ (centre de G).

Groupes abéliens

Remarque

Pour toute représentation (ρ, V) d'un groupe G et tout $g \in G$, $\rho(g)$ correspond à une application linéaire bijective $V \to V$. C'est un morphisme de représentations si $g \in Z(G)$ (centre de G).

Proposition

Si G est un groupe abélien fini, alors ses représentations irréductibles sont de dimension 1.

Le groupe S_3

Dans S_3, la représentation triviale et la représentation $S_3 \to GL(\mathbb{C})$, définie par $\sigma.v = \epsilon(\sigma)v$, sont des représentations irréductibles de degré 1.

Le groupe S_3

Dans S_3, la représentation triviale et la représentation $S_3 \to GL(\mathbb{C})$, définie par $\sigma.v = \epsilon(\sigma)v$, sont des représentations irréductibles de degré 1.

Proposition

L'application $\rho : S_3 \to GL(\mathbb{C}^3)$ définie par $\rho(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ définit une représentation de degré 3 sur $\mathbb{C}^3$.

Le groupe S_3

Dans S_3, la représentation triviale et la représentation $S_3 \to GL(\mathbb{C})$, définie par $\sigma.v = \epsilon(\sigma)v$, sont des représentations irréductibles de degré 1.

Proposition

L'application $\rho : S_3 \to GL(\mathbb{C}^3)$ définie par $\rho(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ définit une représentation de degré 3 sur $\mathbb{C}^3$.
Ses sous-représentations sont exactement $G = \langle (1,1,1) \rangle$ (associé à la représentation triviale) et $H = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3,\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \,\}$.

Le groupe S_3

Dans S_3, la représentation triviale et la représentation $S_3 \to GL(\mathbb{C})$, définie par $\sigma.v = \epsilon(\sigma)v$, sont des représentations irréductibles de degré 1.

Proposition

L'application $\rho : S_3 \to GL(\mathbb{C}^3)$ définie par $\rho(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ définit une représentation de degré 3 sur $\mathbb{C}^3$.
Ses sous-représentations sont exactement $G = \langle(1,1,1)\rangle$ (associé à la représentation triviale) et $H = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$.

Proposition

H est une représentation irréductible de $(\rho, \mathbb{C}^3)$.

Proposition

La représentation triviale, la représentation signature et H sont les seules représentations irréductibles de S_3.