Groupe de lecture : représentations irréductibles du groupe symétrique

8 septembre - 24 novembre 2021 (une semaine sur deux)

Présence obligatoire ! Créneau 15h30–17h30 (plutôt 17h25) une semaine sur deux. **Attention, le dernier créneau (le 8 décembre) est 13h15–15h15.** Exposés de 40 minutes. J'enverrai les références par courriel, vous pouvez aussi les récupérer à la bibliothèque. **La préparation prend du temps**, il faut au moins y consacrer quelques jours ! Profitez-bien de vos deux semaines de préparation : vous pouvez m'envoyer une semaine avant vos notes. De plus, il faut bien soigner les démonstrations, même les plus simples et celles que les auteurs éludent par une phrase du type « on voit bien que ». Je ne garantis pas de réponse aux mails de dernière minute.

Parties relevant du sujet (mais les autres sont également intéressantes) :

- [FuHa] : chapitres 1 à 4 ;
- [JaKe] : chapitres 1 et 7 ;
- [Sag] : chapitres 1 et 2 ;
- [Ser] : chapitres 1, 2, 5 et 6.
- [Mal] : chapitres 3 et 6.

On trouvera dans [Der] une version en français de la partie de [Sag] qui nous intéresse. En ce qui concerne le programme des séances, vous pouvez éventuellement transvaser des parties d'un binôme à l'autre mais demandez-moi avant de procéder à tout changement. Si vous avez trop de temps, n'hésitez surtout pas à faire des exemples ! Si c'est possible, il est bien de changer les exemples que vous trouvez dans les références.

Séance 0 (08/09) Introduction : tableaux de Young standards, correspondance de Robinson-Schensted, conséquence combinatoire, interprétation en termes de théorie des représentations.

Séance 1 (22/09) Introduction à la théorie des représentations.

1. Binôme : Sacha Quayle et Pierre-Marie Desbouchages.
   Rudiments de représentations des groupes finis. [FuHa, Lecture 1]. (Ne pas faire la partie unicité de la Proposition 1.8.) Lien entre ensembles sur lesquels G agit et G-modules, représentation régulière $\mathbb{C}[G]$ ([Sag, §1.3] jusqu'à l'Example 1.3.4 inclus).
2. Binôme : Thomas Fortin et Vincent Le Gruiec.
   Caractères. §2.1 et §2.2 de [FuHa]. Partie unicité de la Proposition 1.8 (Corollary 2.16).

Séance 2 (06/10) Sous-groupes de Young, tableaux, tabloïdes.

1. Binôme : Brian Flanagan et Alexis Guérin.
   Classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ ([Sag, §1.1]). Exemples de représentations de petits $\mathfrak{S}_n$ et utilisation de la théorie des caractères : Example 2.6 (pour $\mathfrak{S}_3$) et §2.3 (pour $\mathfrak{S}_4$) de [FuHa] (la démo utilise notamment le Corollary 2.18). Voir aussi [Ser, Sag] pour ces deux exemples. Éventuellement exemples pour d'autres petits groupes ([Ser]).

2. Binôme : Samuel Chan-Ashing et Bastien Lecluse.

   Le module de permutation M^λ. [Sag, §2.1] à partir de Definition 2.1.3. (Ne pas parler de représentation induite, ou alors juste mentionner le terme.)

Séance 3 (20/10) Modules de Specht

1. Binôme : Victor Voisin et Florent Corniquel.

   Ordres de dominance et lexicographique sur les partitions [Sag, §2.2]. Modules de Specht [Sag, §2.3] jusqu'à la définiton de κ_t (avant la Definition 2.3.2).
2. Binôme : Liam Imdache et Félix Frelot.

   Modules de Specht. Suite de [Sag, §2.3].

Séance 4 (10/11) Modules de Specht sur $\mathbb{C}$.

1. Binôme : Gabriel Bartlett et Éliot Hecky.

   Les modules de Specht sont irréductibles et deux à deux non isomorphes (le caractère complet de la famille est traité par le groupe d'après). [Sag, §2.4] (sans le dernier corollaire).
2. Binôme : Mickaël Lebedev et Simon Viel.

   Les modules de Specht forment une famille complète de modules irréductibles (utiliser [FuHa, Corollary 2.13] ; en particulier, ne pas utiliser [FuHa, Proposition 2.30] car on ne l'a pas démontré). Les polytabloïdes de tableaux standards forment une famille libre. [Sag, §2.5].

Séance 5 (24/11) Dimension des modules de Specht sur $\mathbb{C}$.

1. Binôme : Victor Lecerf et Maxime Moscatelli.

   (*) Éléments de Garnir. [Sag, §2.6] jusqu'à avant le Theorem 2.6.4.
2. Binôme : Dorian Perrot et Kilian Lebreton.

   Les polytabloïdes de tableaux standards forment une famille génératrice. Suite et fin de [Sag, §2.6]. Rappeler que l'égalité du point 3 du Theorem 2.6.5 est la formule donnée lors de la séance introductive.

Séance 6 (08/12) **Attention horaire 13h15–15h15 !** Règles de branchement.

1. Binôme : Nolwenn Le Mehaute et Émile Breton.

   Règle de branchement pour la restriction. [Sag, §2.8] (ne pas faire le point 2 du Theorem 2.8.3).
2. Binôme : Dounia Darkaoui et Ziqian Yin

   (*) Représentation induite : [FuHa, §3.3] jusqu'à l'Exercise 3.16 (exclus) puis (3.18). Formule de réciprocité de Frobenius ([Sag, Theorem 1.12.6]). Règle de branchement pour l'induction (point 2 de [Sag, Theorem 2.8.3]).

Références

[Der] M. Derrien, *Représentations du groupe symétrique*. Rapport de stage de L3, Université de Brest. http://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/Gwendal.Soisnard/Rapports_2016/Marie_Derrien_35667.pdf

[FuHa] W. Fulton et J. Harris, *Representation Theory, A First Course*. Springer-Verlag (1991).

[JaKe] G. James et A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **16**, Addison-Wesley (1981).

[Mal] M.-P. Malliavin, *Les groupes finis et leurs représentations complexes*. Collection Maîtrise de mathématiques pures, Masson (1981).

[Sag] B. E. Sagan, *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions* (second edition). Graduate Texts in Mathematics, Springer (2001).

[Ser] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*. Méthodes, Hermann (1998).