Groupe de lecture : représentations irréductibles du groupe symétrique

Séance introductive : une identité combinatoire

Salim Rostam

Mercredi 8 septembre 2021

1 Treillis de Young

(Cf. Sagan §5.1.)

Définition 1.1. Une *partition* de n est une suite $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h \geq 1)$ décroissante d'entiers de somme n. On note $\lambda \vdash n$.

Exemple 1.2. $(4,2,1) \vdash 7$.

On peut représenter une partition $\lambda \vdash n$ par un *diagramme de Young* : c'est un tableau avec λ_i cases dans la ligne i, où les cases sont alignées à gauche. Par exemple, le diagramme de Young correspondant à la partition $(4,2,1) \vdash 7$ de l'exemple précédent est $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2} \ \\ \cline{1-1} \end{array}$.

Soit λ est une partition de n. Dans son diagramme de Young, on peut écrire tous les entiers de 1 à n (de façon bijective) : on dit qu'on obtient un *tableau* de Young. Si les entiers sont croissants de gauche à droite et de haut en bas, en dit que le tableau est *standard*. On note $\mathrm{Std}(\lambda)$ l'ensemble des tableaux standards de forme λ.

Exemple 1.3. $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}$ est un tableau de forme $(3,1) \vdash 4$ et $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$ est un tableau stardard.

Définition 1.4. Si λ et μ sont deux partitions, on écrit $\mu \uparrow \lambda$ (resp. $\mu \downarrow \lambda$) et on dit que μ est *couverte* par λ si le diagramme de Young de λ s'obtient en ajoutant (resp. enlevant) une case à celui de μ.

Exemple 1.5. On a $(2,1) \uparrow \lambda$ avec $\lambda = (3,1), (2,2)$ ou $(2,1,1)$.

Lemme 1.6. *Si λ est une partition de $n \geq 1$ alors*

$$\#\mathrm{Std}(\lambda) = \sum_{\mu \uparrow \lambda} \#\mathrm{Std}(\mu).$$

Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble des diagrammes de Young (y compris le diagramme vide). Les relations de couverture sont les relation de « filiation directe ».

Lemme 1.7. *L'ensemble $\mathcal{Y}$ a une structure d'arbre, qui possède la propriété suivante : si λ couvre exactement k partitions alors λ est couverte par exactement $k+1$ exactement $k+1$ partitions.*

(Faire un dessin.)

Démonstration. Les partitions couvertes par (resp. que couvre) λ correspondent aux boîtes du diagramme de Young de λ que l'on peut enlever (resp. ajouter), tout en restant un diagramme de Young. En regardant la frontière « en escalier » du diagramme de Young de λ de bas en haut, on remarque que les boîtes enlevables (resp. ajoutables) correspondent au premier segment vertical (resp. horizontal) de chaque série de segment verticaux (resp. horizontaux). (Faire un dessin.) Ainsi, les boîtes ajoutables en enlevables vont par paire. La description de la frontière n'a pas tenu compte de la boîte ajoutable de la première ligne, ce qui donne le résultat. $\square$

Considérons maintenant le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$ de base les éléments de $\mathcal{Y}$. Sur $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$ on considère les opérateurs D et U donnés par

$$D\lambda := \sum_{\mu\uparrow\lambda} \mu,$$
$$U\lambda := \sum_{\mu\downarrow\lambda} \mu.$$

Par exemple, on a

$$D\,\ydiagram{4,2} = \ydiagram{3,2} + \ydiagram{4,1},$$
$$U\,\ydiagram{4,2} = \ydiagram{5,2} + \ydiagram{4,3} + \ydiagram{4,2,1}.$$

On remarque que

$$D^n\lambda = \#\mathrm{Std}(\lambda)\emptyset,$$

si $\lambda \vdash n$ et

$$U^n\emptyset = \sum_{\lambda\vdash n} \#\mathrm{Std}(\lambda)\lambda.$$

En effet, un tableau standard de forme λ n'est rien autre qu'un chemin dans $\mathcal{Y}$ entre $\emptyset$ et λ (à l'étape i on place l'entier i dans la nouvelle boîte i). Par exemple, le tableau standard $\ytableaushort{124,3}$ correspond au chemin

$$\emptyset \to \ydiagram{1} \to \ydiagram{2} \to \ydiagram{2,1} \to \ydiagram{3,1}.$$

On en déduit que

$$D^nU^n\emptyset = \sum_{\lambda\vdash n} \#\mathrm{Std}(\lambda)^2\emptyset. \tag{1.8}$$

Proposition 1.9. *Si I désigne l'opérateur identité de $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$ alors*

$$DU - UD = I.$$

Remarque 1.10. Rappelez-vous qu'une telle égalité ne peut pas avoir lieu en dimension finie !

Démonstration. Soit $\lambda \vdash n$. Examinons la quantité $DU\lambda$. Par définition, on a

$$U\lambda = \sum_{\mu\downarrow\lambda} \mu,$$

donc par linéarité,

$$\begin{aligned} DU\lambda &= \sum_{\mu\downarrow\lambda} D\mu \\ &= \sum_{\mu\downarrow\lambda}\sum_{\nu\uparrow\mu} \nu \\ &= \sum_{\nu\sim\lambda} a_\nu \nu, \end{aligned}$$

où $\nu \sim^+ \lambda$ ssi ν est une partition (de n) couverte par une partition μ qui couvre également λ. Mais pour $\lambda \neq \nu \sim^+ \lambda$, une telle partition μ est nécessairement unique (et $\mu =: \lambda \vee \mu$ est donnée par la superposition des diagrammes de Young de λ et ν), ainsi pour un tel $\lambda \neq \nu \sim^+ \lambda$ on a $a_\nu = 1$. De plus, si k est le nombre de boîte ajoutables de λ alors il y a exactement k partition μ telles que $\mu \downarrow \lambda$ donc $a_\lambda = k$.

De même, on a

$$D\lambda = \sum_{\mu \uparrow \lambda} \mu,$$

donc

$$\begin{aligned} UD\lambda &= \sum_{\mu\uparrow\lambda} U\mu \\ &= \sum_{\mu\uparrow\lambda} \sum_{\nu\downarrow\mu} \nu \\ &= \sum_{\nu \sim^- \lambda} b_\nu \nu, \end{aligned}$$

où $\nu \sim^- \lambda$ ssi ν est une partition (de n) qui couvre une partition μ couverte par λ. Pour $\lambda \neq \nu \sim^- \lambda$, une telle partition μ est unique (et $\mu =: \lambda \wedge \mu$ est donnée par l'intersection de diagrammes de Young) et donc $a_\nu = 1$. Par le lemme précédent, le nombre de boîtes enlevables de λ est $k-1$ donc $a_\lambda = k-1$.

Finalement, on remarque que pour $\nu \neq \lambda$ on a $\nu \sim^+ \lambda$ ssi ν est obtenue à partir de λ en bougeant une boîte ssi $\nu \sim^- \lambda$. En écrivant simplement $\sim$ on a donc

$$\begin{aligned} DU\lambda &= k\lambda + \sum_{\substack{\nu\sim\lambda \\ \nu\neq\lambda}} \nu, \\ UD\lambda &= (k-1)\lambda + \sum_{\substack{\nu\sim\lambda \\ \nu\neq\lambda}} \nu, \end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

Une récurrence immédiate donne

$$DU^n - U^n D = nU^{n-1}, \tag{1.11}$$

pour tout $n \geq 1$, et donc

$$Dp(U) - p(U)D = p'(U),$$

pour tout polynôme $p \in \mathbb{Q}[X]$.

Corollaire 1.12.

$$n! = \sum_{\lambda\vdash n} \#\mathrm{Std}(\lambda)^2. \tag{1.13}$$

Démonstration. Par (1.8), il suffit de montrer que

$$D^n U^n \emptyset = n!\emptyset.$$

La propriété est vraie pour $n = 1$ puisque $U\emptyset = \square$ et $D\square = \emptyset$ et par récurrence on a, par (1.11)

$$\begin{aligned} D^n U^n \emptyset &= D^{n-1} D U^n \emptyset \\ &= D^{n-1}\left(nU^{n-1} + U^n D\right)\emptyset \\ &= nD^{n-1}U^{n-1}\emptyset + D^{n-1}U^n D\emptyset. \end{aligned}$$

On a $D\emptyset = 0$ donc $D^{n-1}U^n D\emptyset = 0$, et par hypothèse on a $nD^{n-1}U^{n-1}\emptyset = n(n-1)!\emptyset = n!\emptyset$ ce qui conclut. $\square$

2 Correspondance de Robinson–Schensted

(Voir Sagan, §3.) On va maintenant voir l'identité (1.13) précédente

$$n! = \sum_{\lambda\vdash n} \#\mathrm{Std}(\lambda)^2$$

comme une égalité entre les cardinaux de deux ensembles.

2.1 Insertion de Schensted

Craige Schensted (maintenant Ea Ea… 1927–2021), Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À partir d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on va construire deux tableaux standards P et Q de même forme. On part de la paire de tableaux vide et on fait la procédure suivante. À l'étape $i \in \{1, \dots, n\}$, on regarde dans la première ligne de P l'ensemble des cases $> \sigma(i)$. Si cet ensemble est vide, on place $\sigma(i)$ en bout de ligne et sinon, si k est la plus petite de ces cases, on remplace k par $\sigma(i)$ et on fait la même chose pour la ligne d'en-dessous pour l'entier k. La case rajoutée dans P est alors recopiée dans Q, avec cette fois le numéro i.

Par exemple, avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, les étapes sont les suivantes (la flèche horizontale signifiant l'insertion).

Insertion de $\sigma(1) = 3$. C'est la première étape, donc on a juste $P = 3$ et $Q = 1$.

Insertion de $\sigma(2) = 1$. On rajoute 1 dans la première ligne de P. Le 3 est éjecté et se retrouve donc dans la deuxième ligne :

$$3 \quad \leftarrow \quad 1$$

donc

$$P = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

On met donc à jour Q avec l'entrée 2 là où se trouve la nouvelle case de P (c'est-à-dire celle qui contient 3) :

$$Q = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Insertion de $\sigma(3) = 5$. On rajoute 5 dans la première ligne de $P = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$. Ici toutes les entrées de la première ligne sont < 5 donc le 5 est simplement ajouté en fin de ligne :

$$\begin{matrix} 1 & \leftarrow & 5 \\ 3 & & \end{matrix}$$

donc

$$P = \begin{matrix} 1 & 5 \\ 3 & \end{matrix}$$

La nouvelle case de P est celle du 5, donc on rajoute à cet endroit la case 3 pour Q, qui devient donc

$$Q = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}$$

Insertion de $\sigma(4) = 7$. C'est la même situation qu'avant, on obtient donc

$$P = \begin{matrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & & \end{matrix} \qquad\qquad Q = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{matrix}.$$

Insertion de $\sigma(5) = 4$. Les cases plus grandes que 4 sur la première ligne de P sont 5 et 7, c'est donc 5 (la plus petite) qui est remplacée par 4. On insère donc 5 sur la deuxième ligne, et on l'y ajoute juste à la fin puisque 5 est le plus grand élément. On obtient :

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 7 & \leftarrow 4 \\ 3 & & & \end{matrix}$$

donc

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 7 & \\ 3 & & & \leftarrow 5 \end{matrix}$$

donc

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & \end{array}$$

La case ajoutée est celle du 5, elle se rajoute donc sur Q avec ici le même numéro :

$$Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & \end{array}$$

Insertion de $\sigma(6) = 6$. On insère le 6 dans la première ligne, le 7 est éjecté et est ajouté directement dans la deuxième ligne car c'est le plus grand élément :

$$\begin{array}{lllll} 1 & 4 & 7 & \leftarrow & 6 \\ 3 & 5 & & & \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{llll} 1 & 4 & 6 & \\ 3 & 5 & & \leftarrow 7 \end{array}$$

donc

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{array}$$

La case ajoutée est celle du 7, elle se rajoute donc sur Q avec le numéro 6 :

$$Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{array}$$

Insertion de $\sigma(7) = 2$. On insère le 2 dans la première ligne, qui sort le 4 que l'on insère donc sur la deuxième ligne ; il sort le 5 que l'on place sur la troisième ligne :

$$\begin{array}{llll} 1 & 4 & 6 & \leftarrow 2 \\ 3 & 5 & 7 & \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 6 & \\ 3 & 5 & 7 & \leftarrow 4 \end{array}$$

donc

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{array}$$

La nouvelle case est celle du 5, donc cette case se rajoute dans Q avec le numéro 7 :

$$Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{array}$$

Finalement, à la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ on a associé la paire

$$P = \begin{array}{lll} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{array} \qquad\qquad Q = \begin{array}{lll} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{array}$$

2.2 Autre exemple

(Si le temps le permet ; tout le monde en fait un ; donner quand même le résultat.) Prenons maintenant $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. On obtient successivement pour P

$$2$$

puis

$$2 \quad 7$$

puis

$$\begin{matrix} 2 & 7 \end{matrix} \leftarrow 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & 7 \\ 2 & \end{matrix}$$

puis

$$\begin{matrix} 1 & 7 \\ 2 & \end{matrix} \leftarrow 5 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

puis

$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{matrix} \leftarrow 3 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{matrix} \leftarrow 5 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & \end{matrix}$$

puis

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & \\ 7 & & \end{matrix}$$

puis

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & \\ 7 & & \end{matrix} \leftarrow 4 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{matrix}$$

ainsi

$$P = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{matrix}$$

puis

$$Q = \begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{matrix}$$

La paire associée à $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ est donc

$$P = \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{matrix} \qquad\qquad Q = \begin{matrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & & \end{matrix}$$

Remarque 2.1. Le lien avec la paire (P, Q) de la partie précédente est clair ; mais quel est le lien entre σ' et σ ?

2.3 Inversion

Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la paire (P, Q) que l'on obtient est formée de deux tableaux de Young standards de même forme $\lambda \vdash n$. Réciproquement, à l'aide du tableau Q on voit qu'étant donnée une paire de tableaux de Young standards de même forme on peut associer une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On obtient ainsi une correspondance

$$\mathfrak{S}_n \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \mathrm{Std}(\lambda) \times \mathrm{Std}(\lambda),$$

où $\mathrm{Std}(\lambda)$ est l'ensemble des tableaux de Young standards de forme $\lambda \vdash n$. En passant au cardinaux, on retrouve l'identité (1.13).

La correspondance avait été auparavant établie par Gilbert Robinson (1906–1992) en 1938.

2.4 Applications

(Voir le livre (téléchargeable gratuitement) *The Surprising Mathematics of Longest Increasing Subsequences* de Dan Romik.)

On s'intéresse au problème suivant. Étant donnée une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, un sous-mot croissant est un sous-mot de σ représentée comme un tableau $2 \times n$. Autrement dit, c'est une suite $\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k$.

Que dire de la longueur ℓ_n d'un plus long sous-mot croissant d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ tirée uniformément ?

On a le résultat suivant, dû à Hammersley (1972).

Théorème 2.2. *On a une convergence* $\frac{\ell_n}{\sqrt{n}} \to \ell \geq 1$ *en probabilité quand* $n \to +\infty$.

En réécrivant l'identité (1.13) sous la forme suivante :

$$1 = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\#\mathrm{Std}(\lambda)^2}{n!},$$

on obtient naturellement une mesure de probabilité sur l'ensemble des partitions de n, la probabilité de tirer une partition $\lambda \vdash n$ étant $\frac{\#\mathrm{Std}(\lambda)^2}{n!}$. C'est la mesure de *Plancherel.* On peut la voir comme l'image de la mesure uniforme sur le groupe symétrique via la correspondance de Robinson–Schensted.

La longueur d'un plus long sous-mot croissant d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ correspond à la taille λ_1 de la première ligne de la partition correspondant à la forme des tableaux de la correspondance de Robinson–Schensted appliquée à σ. Ainsi, le problème précédent revient à déterminer λ_1 quand λ est tirée selon la mesure de Plancherel.

Vu sous cet angle, Logan–Shepp et indépendemment Kerov–Vershik ont montré que $\frac{\ell_n}{\sqrt{n}}$ tend vers 2 en probabilité. Leur résultat est en fait beaucoup plus fort.

Théorème 2.3 (Logan–Shepp, Kerov–Vershik, 1979)**.** *On tourne les diagrammes de Young de sorte à ce que les bords verticaux et horizontaux forment un « V », que l'on pose sur la courbe* $y = |x|$*, et l'on voit alors une partition* λ *comme une fonction* $\hat{\lambda}$ *de* x *via sa frontière supérieure. Avec une normalisation adéquate, la fonction* $\hat{\lambda}$ *converge uniformément en en probabilité (sous la mesure de Plancherel) vers*

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(x \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2}\right), & \text{si } |x| \leq 2, \\ |x|, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mesure de proba sur l'ensemble des partitions, parler de Kerov–Vershik-Logan–Shepp.

3 Théorie des représentations

Revenons à l'identité (1.13)

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} \#\mathrm{Std}(\lambda)^2.$$

On a d'abord donné une preuve directe de cette égalité et ensuite une preuve bijective (*i.e.* via deux ensembles de même cardinal). L'objectif est maintenant d'obtenir cette égalité via deux espaces vectoriels de même dimension. Pour chaque $\lambda \vdash n$, un $\#\mathrm{Std}(\lambda)$ va être la dimension d'une *représentation irréductible* de $\mathfrak{S}_n$ et l'autre $\#\mathrm{Std}(\lambda)$ va être sa multiplicité dans la *représentation régulière* de $\mathfrak{S}_n$.

L'objectif de ce groupe de travail est, après une rapide introduction à la théorie des représentations d'un groupe fini, de construire les représentations irréductibles (qui sont les « nombres premiers » des représentations) du groupe symétrique, cela d'une façon combinatoire. Les deux ingrédients essentiels seront la théorie (élémentaire) des modules ainsi que des objets combinatoire appelés « tabloïdes » (qui ressemble aux tableaux de Young standards).

Si G est un groupe, une *représentation* est un espace vectoriel V sur lequel G agit (avec quelques axiomes naturels), de sorte que l'on a un morphisme de groupes

$$G \to \mathrm{GL}(V).$$

Un intérêt est par exemple que l'on peut par exemple parler de la trace d'un élément de G par rapport à cette représentation, et il se trouve que c'est très utile dans cette théorie. Dans le langage de la *théorie des modules* ($\approx$ espaces vectoriels sur des anneaux), on dit que V est un $\mathbb{C}[G]$-module. En fait, on peut voir la notation $g \cdot v$ comme l'action de $g \in G$ sur v (en tant qu'action de groupe) ou alors comme l'action du « scalaire » g (dans l'anneau $\mathbb{C}[G]$) sur v.

Applications de la théorie des représentations en général : théorème de Burside (résultat purement théorie des groupes), décomposition en irréductibles du déterminant d'une table de multiplication d'un groupe, mais aussi par exemple cryptographie et cristallographie.

La référence principale sera le livre *The Symmetric Group : Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions* de Bruce E. Sagan.