Comprendre (un peu) le Rubik's Cube

Fête de la science 2017

Salim Rostam

Introduction

Cet atelier a pour but de comprendre un peu le Rubik's Cube, en particulier nous ne présenterons pas explicitement de méthode de résolution.

Intégrité des pièces Le cube est formé de trois pièces distinctes : les centres, les coins et les arêtes. Les mouvements ne mélangent pas ces types de pièces : les centres (respectivement les coins, les arêtes) resteront toujours des centres (resp. des coins, des arêtes). Ainsi, les différents mouvements que l'on réalisera permuterons d'une part les coins et d'autre par les arêtes (les centres étant fixes de part la structure du cube en lui-même). On dit que des pièces $P_1, \dots, P_n$ ont été permutées en *n-cycle* si P_1 est à la place de P_2 qui est à la place de P_3... qui est à la place de P_{n-1} qui est à la place de P_n qui est à la place de P_1.

Mouvements de faces Nous adoptons la notation suivante pour décrire les mouvements des différentes faces dans le sens horaire (quand on se met devant la face en question) :

- A pour la face avant ;
- P pour la face postérieure (arrière) ;
- G pour la face gauche ;
- D pour la face droite ;
- H pour la face du haut ;
- B pour la face du bas.

On parlera de *mouvement élémentaire*.

Remarque. Si vous allez sur internet, vous rencontrerez certainement les notations anglaises : F (front), B (back), L (left), R (right), U (up) et D (down).

Si F est un mouvement élémentaire, on note F' ce même mouvement dans le sens anti-horaire et F^2 le mouvement F réalisé deux fois d'affilé (horaire ou anti-horaire, cela revient au même). Ainsi, G' est la rotation de la face gauche dans le sens anti-horaire et D^2 est le demi-tour de la face droite.

Séquences de mouvements On écrit les séquences de mouvements en écrivant les mouvements de faces concernées les un après les autres, en lisant de gauche à droite. Par exemple, la séquence AD' signifie que l'on tourne d'abord la face avant dans le sens horaire puis la face de droite dans le sens anti-horaire. Attention, les mouvements élémentaires ne commutent pas en général : par exemple, les séquences AD' et $D'A$ ont des effets différents sur le cube, ce que l'on notera $AD' \neq D'A$. Cependant, les mouvements de faces opposées commutent, ce qui se traduit par exemple par $G^2D = DG^2$, ainsi que bien évidement les mouvements d'une même face, ce qui se traduit par exemple par $P^2P' = P'P^2 (= P)$.

Séquence inverse Comme pour les faces, chaque séquence S possède une séquence *inverse* S'. Pour obtenir S', on lit S à l'envers en mettant des $'$ quand il n'y en a pas et inversement, et en ne touchant pas aux ^{2} (en particulier, $(S')' = S$). Par exemple, si $S = AD'B^2G$ alors $S' = G'B^2DA'$. Si l'on part d'un cube résolu, la séquence $SS' = S'S$ n'aura pas d'effet.

Ordre Toute séquence S possède un *ordre*, c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier n non nul tel que S^n n'a pas d'effet sur le cube : cela provient du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de configurations possibles sur le cube. Chaque mouvement élémentaire F a un ordre de 4, ainsi que F', mais F^2 a un ordre de 2. Cependant, une séquence quelconque peut avoir un ordre bien plus grand ! Finalement, si S est une séquence d'ordre n alors S' est également d'ordre n et $S' = S^{n-1}$.

Trouver l'ordre d'une séquence de mouvements

Soit S une séquence quelconque : le but est de trouver l'ordre n de S sans avoir à effectuer la séquence S^n. La stratégie est la suivante : on regarde l'ordre de S en regardant uniquement les coins puis en regardant uniquement les arêtes. Un outil utile sera le *plus grand diviseur commun* (pgcd) à deux entiers : une fois que l'on connait l'ordre n_c pour les coins et l'ordre n_a pour les arêtes, l'ordre de la séquence S sera donné par $n = \text{pgcd}(n_c, n_a)$. Il nous suffira dans les exemples à suivre de la règle suivante :

- si a divise b alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a) = b$;
- si a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 alors $\text{pgcd}(a, b) = ab$.

1. La séquence $S = DHD'$ fait un 4-cycle sur les coins et un 4-cycle sur les arêtes, et est d'ordre $\text{pgcd}(4, 4) = 4$.
2. La séquence $S = DHD'H' = [D, H]$ (on parle de *commutateur*) fait deux 2-cycles sur les coins et un 3-cycle sur les arêtes.
   - La séquence S^2, qui laisse invariante la position des coins, les tourne d'un tiers de tour donc il faudra faire S^6 pour que les coins soient bien placés *et* bien orientés, c'est-à-dire $n_c = 6$.
   - La séquence S^3, qui laisse invariante la position des arêtes, laisse également invariante leur orientation, c'est-à-dire $n_a = 3$.

   Ainsi, la séquence S est d'ordre $\text{pgcd}(6, 3) = 6$.
3. La séquence $S = D'HD'$ fait un 6-cycle sur les coins, et sur les arêtes fait un 5-cycle ainsi qu'un 2-cycle.
   - La séquence S^2 (respectivement S^5) laisse invariante l'orientation des arêtes du 2-cycle (resp. du 5-cycle) donc $n_a = \text{pgcd}(2, 5) = 10$.
   - La séquence S^6 laisse invariant les coins donc $n_c = 6$.

   Ainsi S est d'ordre $\text{pgcd}(10, 6) = 5 \times 6 = 30$ (pour retrouver la règle de calcul du pgcd précédente : après S^6 les arêtes du 2-cycle et les coins sont corrects, il reste le 5-cycle à traiter donc l'ordre de S est $\text{pgcd}(5, 6) = 5 \times 6$). Remarquez ce qu'il se passe au bout de $2, 5, \mathbf{6}, \underline{10}, \mathbf{12}, \mathbf{18}, \underline{20}, \mathbf{24}$ réalisations de S (souligné = multiples communs à 2 et 6, gras = multiples communs à 2 et 5).
4. La séquence $S = HD'$ fait deux 3-cycles sur les coins et un 7-cycle sur les arêtes.
   - La séquence S^3 tourne les coins, qui sont bien placés, d'un tiers de tour, donc pour avoir des coins corrects il faut faire $(S^3)^3 = S^{3\times 3} = S^9$ donc $n_c = 9$.
   - La séquence S^7 ne bouge pas les arêtes donc $n_a = 7$.

   Ainsi, la séquence S est d'ordre $\text{pgcd}(9, 7) = 9 \times 7 = 63$.
5. La séquence $S = HD$ fait un 5-cycle sur les coins et un 7-cycle sur les arêtes.

— La séquence S^5 tourne les coins d'un tiers de tour donc $n_c = 3 \times 5 = 15$.
— La séquence S^7 ne touche pas aux arêtes donc $n_a = 7$.
Ainsi, la séquence S est d'ordre $\mathrm{pgcd}(15, 7) = 15 \times 7 = 105$.

Exploiter les commutateurs

Si S_1 et S_2 sont deux séquences de mouvements, le commutateur de S_1 et S_2 est $[S_1, S_2] = S_1 S_2 S_1' S_2'$. On a vu dans la section précédente l'exemple du commutateur $[D, H]$. On va montrer ici comment utiliser ces mouvements particuliers pour réaliser des cycles courts.

Rotation de deux coins On reprend le commutateur $[D, H]$ précédent, et on considère $S = [D, H]^2 = [D, H][D, H] = DHD'H'DHD'H'$. On a déjà vu que la séquence S garde les quatre coins des deux 2-cycles dans la bonne position mais les tourne d'un quart de tour. On va s'intéresser au coin ADB (le coin commun aux faces avant, droite et bas). La réalisation de S laisse invariante la face B, mis à part ce coin ADB qui est donc tourné d'un tiers de tour. Ainsi, la séquence $[S, B] = SBS'B'$ change seulement les deux coins ADB et AGB, en les tournant. En effet :

— la réalisation de S change la face B seulement en tournant le coin en ADB ;
— en faisant B puis S', les deux étages au-dessus de la face B vont se reconstruire (puisque cela ne dépend pas de quel cube est en ADB), mais va tourner le cube actuellement en ADB.

Il est clair que la séquence $[S, B]$ a pour ordre 3. En particulier, les séquences $[S, B]^2$ et $[S, B]'$ coïncident (et tournent les coins ADB et AGB dans le sens inverse par rapport à ce que fait $[S, B]$), mais $[S, B]'$ contient deux fois moins de mouvements que $[S, B]^2$. Autre astuce : au lieu de faire $[S, B]'$ on peut faire $[S, B]$ en ayant préalablement tourné le cube d'un demi-tour en gardant la face A devant nous puis d'un quart de tour dans le sens anti-horaire en gardant la face D à droite.

Cycle d'arêtes On va réaliser un 3-cycle sur les arêtes. Pour cela, on reprend la séquence HD' précédente et on considère $S = (HD')^9$. On a vu que S conserve les coins (placement et orientation), et fait un 7-cycle sur les arêtes. De plus, sur la face B seule une arête (l'arête DB, commune aux faces D et B) est dans le 7-cycle. Ainsi, après avoir fait la séquence $[S, B]$, toutes les arêtes seront à leur place initiale sauf :

— celle qui était en DB après réalisation de S (en PH initialement) ;
— celle que l'on met en DB après la réalisation de S (via le mouvement B), en AB initialement ;
— celle qui était en DB initialement, qui se retrouve bien en DB après réalisation de SBS' mais donc se retrouve en AB après $SBSB' = [S, B]$.

Ainsi, la séquence $[S, B]$ réalise un 3-cycle entre les arêtes en DB, AB et PH.

Conjugaison (« *set-up move* »)

Cycle d'arêtes Le 3-cycle d'arêtes que l'on obtient dans la section précédente est bien joli, mais les arêtes concernées sont un peu éparpillées : on voudrait avoir une séquence qui permute trois arêtes d'une même face. La séquence précédente est $\Sigma = [S, B]$ avec $S = (HD')^9$, et permute les arêtes DB, AB et PH. Ainsi, si l'on effectue P^2 avant et après Σ, on permutera trois arêtes de la face B. Plus précisément, la séquence $P^2 \Sigma P^2$ permute les arêtes DB, AB et

PB. Remarquez que les séquences Σ et $P^2\Sigma P^2$ ont le même ordre (ici 3), et en général deux séquences conjuguées ont toujours le même ordre.

Rotation de deux coins On va faire un peu la même chose, mais cette fois en voulant résoudre un cas plus complexe. La séquence $\Sigma = [S, B]$ de la section précédente avec $S = [D, H]^2$ tourne les coins en AB (ABD et ABG). En faisant $D'\Sigma D$, on tourne les coins ABG et AHD.

Faire ce que l'on veut

Les séquence que l'on a créées jusqu'à maintenant résultent de courtes séquences prises un peu au hasard. Comment faire maintenant pour construire une séquence dans un but précis, par exemple : permuter trois coins ? Nous allons prendre l'exemple du 3-cycle $ADB \to ADH \to AGB \to ADB$. Pour cela, nous allons encore utiliser des commutateurs.

Considérons la séquence $S = D$, qui réalise $ADB \to ADH$. On veut maintenant amener le coin AGB en ADH, afin que le coin originalement en AGB aille en ADB après la réalisation de S'. Pour modifier seulement nos trois coins, il faut amener AGB en ADB en ne modifiant rien d'autre sur la face D (la séquence S ne modifiant rien d'autre en dehors de cette face). Une possibilité est $T = HG'H'$. Le commutateur $[S, T] = STS'T'$ est donc un algorithme comme recherché. Le tableau suivant trace les différentes pièces.

Début	ADB	ADH	AGB
Après S	ADH	PDH	AGB
Après T	AGH	PDH	ADH
Après S'	AGH	ADH	ADB
Après T'	ADH	AGH	ADB

Références

[1] www.francocube.com/deadalnix/commutateur