Autour du paradoxe de Banach-Tarski

Tristan Robert   Salim Rostam

1er mai 2012

Introduction

Le but de ce séminaire est de comprendre le paradoxe de Banach-Tarski, après avoir introduit les notions nécessaires à sa formulation. Par la suite, nous aborderons l'existence de "mesures universelles".

1 Définitions

Dans cette section G désigne un groupe agissant sur un ensemble E.

Définition 1 (Ensembles équidécomposables)**.** Soient A et B deux parties de E. On dit que A et B sont **finiment G-équidécomposables** s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que :

- il existe deux partitions $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ et $B = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$;
- il existe $g_1, ..., g_n \in G$ tels que $\forall k \in [\![1, n]\!], g_k(A_k) = B_k$.

Si ces deux conditions sont réunies, on écrit :

$$A \equiv_G B$$

ou plus précisément $A \overset{k}{\equiv}_G B$.

Pour ne pas alourdir le vocabulaire, on omettra dans la suite le terme "finiment".

Remarque. G est un groupe, il admet donc un élément neutre e. Ainsi, si A est une partie de E, alors A est équidécomposable à elle-même : $A \overset{1}{\equiv}_G A$. En effet, $A = e.A$.

Définition 2 (Ensemble paradoxal)**.** On dit que E est **G-paradoxal** (ou paradoxal sous l'action de G) s'il existe A et B deux parties disjointes de E telles que $A \equiv_G E$ et $B \equiv_G E$. Autrement dit, E est G-paradoxal s'il contient deux sous-ensembles disjoints G-équidécomposables à E tout entier.

Remarque. On peut avoir $A \overset{n}{\equiv}_G E$ et $B \overset{m}{\equiv}_G E$ avec $n \neq m$.

On peut également remarquer que les parties A et B sont disjointes, mais ne forment pas nécessairement une partition de E. On peut en fait donner une autre définition d'un ensemble paradoxal, équivalente à la première.

Définition 3 (Ensemble dédoublable)**.** On dit que E est **dédoublable** sous l'action de G s'il existe une partition $A \sqcup B$ de E telles que $A \equiv_G E$ et $B \equiv_G E$. Autrement dit, E est dédoublable sous l'action de G s'il admet deux sous-ensembles complémentaires G-équidécomposables à E tout entier.

La G-dédoublabilité implique bien sur la G-paradoxalité. La démonstration de la réciproque utilise un puissant théorème, qui n'est pas sans rappeler le théorème de Cantor-Bernstein.

Théorème 4 (Banach, 1924)**.** *Soient C et D deux parties de E. On suppose que :*
- *C est G-équidécomposable à une partie de D ;*
- *D est G-équidécomposable à une partie de C.*

Alors C et D sont G-équidécomposables.

Démonstration du théorème 4. Il existe une bijection $g : C \to D_1$ telle que $\forall \widetilde{C} \subset C$, $\widetilde{C} \equiv g(\widetilde{C})$. En effet, $C \equiv D_1$ donc on peut écrire $C = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k, D_1 = \bigsqcup_{k=1}^{n} D_{1,k}$ avec $C_i = g_i D_{1,i}$. Alors g est la bijection de C dans D_1 qui coïncide avec $\widehat{g}_i : C_i \to D_{1,i}$ ($\widehat{g}_i(x) = g_i x$) pour tout i. On a de même une bijection $h : D \to C_1$ telle que $\forall \widetilde{D} \subset D$, $\widetilde{D} \equiv h(\widetilde{D})$. On a alors une injection $g : C \to D$. On pose $A_0 = C \setminus C_1, A_{n+1} = h^{-1}(g(A_n))$ et $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. On montre alors que $h(C \setminus A) = D \setminus g(A)$. Alors comme $C \setminus A \subset C_1$ on a $C \setminus A \equiv h(C \setminus A)$ i.e. $C \setminus A \equiv D \setminus g(A)$, et comme $A \subset C$ on a $A \equiv g(A)$. D'où $A \sqcup (C \setminus A) \equiv g(A) \sqcup (D \setminus g(A))$ i.e. $C \equiv D$.

□

Démonstration de [paradoxal ⇒ dédoublable]. Soit E un ensemble G-paradoxal ; on peut donc trouver deux parties A et B de E disjointes toutes deux G-équidécomposables à E. On définit $\widetilde{A} := E \setminus B$: les parties $\widetilde{A}$ et B forment une partition de E. On sait déjà que B est équidécomposable à E. De plus :
- comme $\widetilde{A} \subset G$, $\widetilde{A}$ est trivialement équidécomposable à une partie de G ($\widetilde{A}$ est G-équidécomposable à elle-même d'après une remarque précédente) ;
- comme $A \subset \widetilde{A}$ et que par hypothèse G est G-équidécomposable à A, G est donc G-équidécomposable à une partie de $\widetilde{A}$.

D'après le théorème précédent, $\tilde{A}$ et G sont donc G-équidécomposables. Finalement, on a montré que E est dédoublable sous l'action de G ! □

Pour finir avec toutes ces définitions, en voici une dernière que nous n'utiliserons qu'à la fin de ce document.

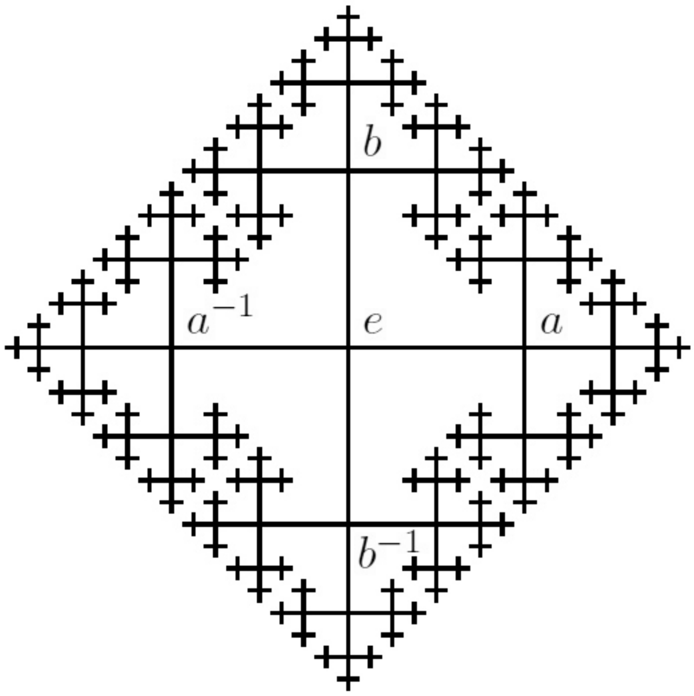
Définition 5 (Mesure universelle finiment additive)**.** Une **mesure universelle finiment additive** sur E est une application $\mu : \mathcal{P}(E) \to [0, +\infty]$ telle que

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toutes parties $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ parties disjointes de E.

2 Le cas du groupe libre à deux éléments

On rappelle que le groupe libre à deux éléments peut être vu comme le groupe $F = \langle a, b \rangle$, ensemble des mots réduits en a et b muni de la loi naturelle "." de mise bout-à-bout suivi de la réduction. Comme F est un groupe, F *agit sur lui-même par translation à gauche* ; dans toute cette section, ce sera de cette action dont il sera question pour les notions d'équidécomposabilité et de paradoxalité. On peut représenter F à l'aide d'un **graphe de Cayley** :

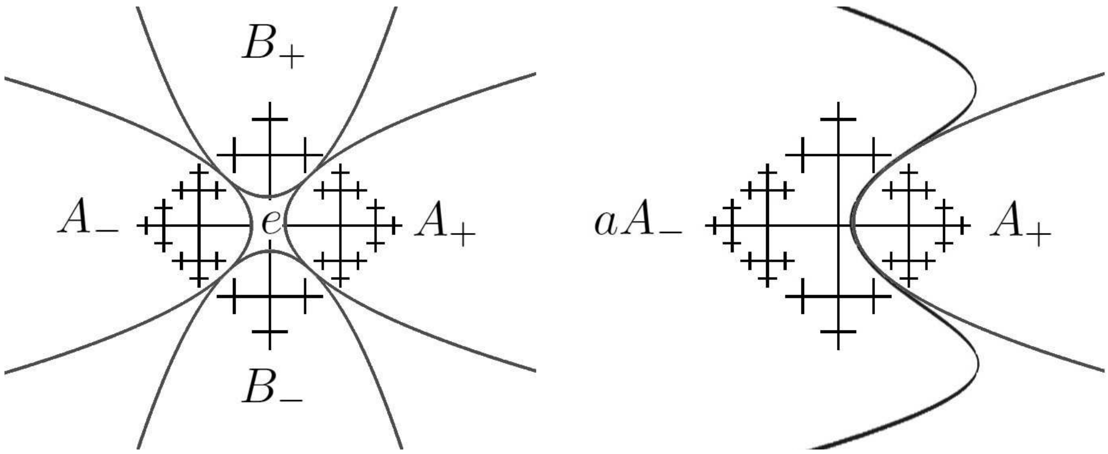


Théorème 6. *L'ensemble F est paradoxal.*

Nous avons besoin de deux petits résultats avant de montrer ce théorème.

Proposition 7. *Soit A l'ensemble des mots de F commençant par a^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$. Alors $A \overset{2}{\equiv} F$.*

Démonstration. On considère la partition de A formée des ensembles A_+ et A_-, où A_+ (respectivement A_-) est l'ensemble des mots de A commençant par une puissance strictement positive (respectivement strictement négative) de A. On a donc $A = A_+ \sqcup A_-$; on a également $F = A_+ \sqcup (F \setminus A_+)$. Si $m \in F$ est un mot réduit qui ne commence pas par une puissance strictement positive de a, alors $m' = a^{-1}.m$ est dans A_- et on a $m = a.m'$. Finalement, $A_+ = e.A_+$ et $F \setminus A_+ = a.A_-$ d'où le résultat annoncé. On peut illustrer la preuve par le dessin suivant :



$\square$

Proposition 8. *Soit B l'ensemble des mots de F commençant par b^m avec $m \in \mathbb{Z}^*$. Alors $B \overset{2}{\equiv} F$.*

Démonstration. C'est une démonstration analogue à celle du lemme précédent ! $\square$

Démonstration du théorème. Avec les notations des deux propositions ci-avant, on a $A \sqcup B \subset F$ avec $A \equiv F$ et $B \equiv F$. Donc F est paradoxal ! $\square$

On peut désormais s'attaquer au vif du sujet.

3 Le cas de la sphère unité $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^3$

Dans cette section, l'action de groupe dont il est question est l'*action naturelle de $SO(3)$ sur $\mathbb{S}$ par isométries.*

3.1 À un nombre dénombrable de points près

Théorème 9 (Paradoxe de Hausdorff). *Il existe un sous-ensemble dénombrable D de $\mathbb{S}$ tel que $\mathbb{S} \setminus D$ est paradoxal.*

La démonstration de ce théorème nécessite un lemme préliminaire, qui va permettre d'utiliser le résultat de la section précédente sur le groupe libre à deux éléments.

Lemme 10. *Le groupe $SO(3)$ contient un sous-groupe isomorphe à F, le groupe libre à deux éléments.*

Démonstration. Il suffit en fait d'exhiber un tel sous-groupe, ce qui revient à trouver deux générateurs u et v. Posons :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont en fait les matrices dans des bases bien choisies des rotations respectives d'angle π et $\frac{2\pi}{3}$ dont les axes forment un angle de $\frac{\pi}{4}$. On a donc $a^2 = b^3 = I_3$, et ainsi $\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On va démontrer que a et b engendrent un groupe isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: il suffit de démontrer que tout mot réduit en a et b de longueur non nulle est non trivial.

Tout d'abord, on peut démontrer par récurrence que pour tout entier $k > 0$, pour tous $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, il existe des entiers pairs $p_1, ..., p_5$ et des entiers impairs $i_1, ..., i_4$ tels que :

$$2^k m_k := 2^k b^{\varepsilon_1} a b^{\varepsilon_2} a ... b^{\varepsilon_k} a = \begin{pmatrix} p_1 & i_1\sqrt{3} & i_2 \\ p_2\sqrt{3} & i_3 & i_4\sqrt{3} \\ p_3 & p_4\sqrt{3} & p_5 \end{pmatrix}.$$

Comme i_1 est impair, on a en particulier $i_1 \neq 0$ donc $m_k \notin \{I_3, a\}$ d'où $m_k \neq I_3$. Dans la suite, on désignera par $(*)$ la forme du mot m_k.

Il reste alors trois types de mots réduits à traiter :

- si m est de la forme $a...b^\varepsilon$, alors m^{-1} est de la forme $(*)$ et donc $m^{-1} \neq I_3$ puis $m \neq I_3$.
- si m est de la forme $a...a$, alors am est de la forme $(*)$ donc $am \neq a$ puis $m \neq I_3$;
- si m est de la forme $b^{\varepsilon_1}...b^{\varepsilon_2}$, alors ma est de la forme $(*)$ donc $ma \neq a$ puis $m \neq I_3$.

On pose maintenant $u = bab$ et $v = aua$. On a par récurrence $\forall n \in \mathbb{Z}, u^n = b(ab^{-1})^{n-1}ab$ et $v^n = au^n a$: ainsi pour $n \in \mathbb{Z}^*$, u^n est un mot réduit non trivial de la forme $b...b$ et donc v^n est un mot réduit non trivial de la forme $a...a$. Il n'y a donc aucune simplification possible entre u et v : u et v engendrent un groupe libre à deux générateurs $L(u, v)$, qui est donc isomorphe à F ! On a en résumé :

$$F \simeq L(bab, ababa) \subset \langle a, b \rangle \subset SO(3)$$

ce qui démontre le lemme.

□

On peut maintenant démontrer le paradoxe de Hausdorff.

Démonstration du paradoxe de Hausdorff.

Recherche de la partie D. D'après le lemme, on sait que $SO(3)$ possède un sous-groupe libre à deux générateurs : on note (abusivement) F un tel sous-groupe. Soit $D \subset \mathbb{S}$ l'ensemble des points laissés fixes par un élément de F différent de l'identité : $D = \bigcup_{r \in F \setminus \mathrm{Id}} \{\text{points fixes de } r\}$. Chaque $r \in D$ est une rotation d'axe passant par l'origine, elle donc exactement deux points fixes ; F étant dénombrable [1], on en déduit que D l'est aussi. Reste à montrer que $\mathbb{S} \setminus D$ est paradoxal.

F agit librement sur $\mathbb{S} \setminus D$. Si x est un point de $\mathbb{S} \setminus D$, alors x n'est pas un point fixe d'une rotation $r \in F \setminus \mathrm{Id}$ donc $F.x$ reste dans $\mathbb{S} \setminus D$. En effet, s'il existe $f \in F$ tel que $f.x \in D$, alors $\exists r \in F \setminus \mathrm{Id}, r.(f.x) = f.x$. Or, $r.(f.x) = rf.x$ et on a donc $f^{-1}rf.x = x$ ce qui est contradictoire avec $x \notin D$ (car $r \neq \mathrm{Id}$ donc $f^{-1}rf \neq \mathrm{Id}$). Finalement, $\mathbb{S} \setminus D$ est stable par F, et on récupère donc une action de F sur $\mathbb{S} \setminus D$ (c'est l'action induite par $SO(3)$ restreint à F sur $\mathbb{S} \setminus D$).

Soit $x \in \mathbb{S} \setminus D$ et soit $r \in F$ tel que $r.x = x$. x est alors un point fixe d'un élément de F, donc comme $x \notin D$ on a (par construction de D) $r = \mathrm{Id}$. L'action de F sur $\mathbb{S} \setminus D$ est libre !

$\mathbb{S} \setminus D$ est paradoxal. Soit V une partie de $\mathbb{S} \setminus D$ qui contient exactement un élément de chaque orbite de l'action de F sur $\mathbb{S} \setminus D$. On reprend nos deux parties A et B de F ; on rappelle qu'en particulier ces deux parties sont disjointes. On va montrer que AV et BV sont deux parties disjointes équidécomposables à $FV = \mathbb{S} \setminus D$.

- *(Les parties AV et BV sont disjointes.)* Supposons que $AV \cap BV \neq \emptyset$: soit $x \in AV \cap BV$. x s'écrit $x = a.v_1 = b.v_2$ avec $a \in A, b \in B, v_i \in V$. On a donc $b^{-1}a.v_1 = v_2$ (1) : v_1 et v_2 sont alors dans la même orbite, donc $v_1 = v_2$ (par définition de V). L'égalité (1) se réécrit alors $b^{-1}a.v_1 = v_1$, et par liberté de l'action on conclut que $b^{-1}a = e$ i.e. $a = b$ ce qui est impossible car A et B sont disjoints !
- *(AV et BV sont équidécomposables à FV.)* On a démontré dans la section précédente qu'on a une décomposition $A = A_+ \sqcup A_-$ avec $F = A_+ \sqcup a.A_-$. Par un raisonnement analogue au précédent, on montre que $AV = A_+V \sqcup A_-V$ avec $FV = A_+V \sqcup a.(A_-V)$, donc AV est équidécomposable à FV. De même, BV est équidécomposable à FV.
- *($FV = \mathbb{S} \setminus D$.)* Soit $x \in \mathbb{S} \setminus D$; on note $\overline{x} \in V$ le représentant de l'orbite de x. On a par définition $x = f.\overline{x}$ pour un certain $f \in F$,

1. En notant F_n le sous-ensemble de F constitué des mots de longueurs exactement $n \geqslant 1$, il est facile de constater que $|F_n| = 4 \cdot 3^{n-1}$; comme $F = \{e\} \cup \cup_{n \geqslant 1} F_n$, F est donc dénombrable.

donc $x \in FV$. L'autre inclusion a déjà été prouvée : c'est la stabilité de $\mathbb{S} \setminus D$ par F.

Finalement, on a trouvé deux parties disjointes de $\mathbb{S} \setminus D$ équidécomposables à $\mathbb{S} \setminus D$ tout entier : ce dernier est donc paradoxal.

$\square$

Remarque. Étant donné que l'ensemble des orbites est non dénombrable et que l'on ne dispose d'aucun procédé pour choisir un point particulier dans une orbite, on utilise l'axiome du choix pour créer l'ensemble V.

3.2 La sphère $\mathbb{S}$ est paradoxale

On peut faire en sorte de se débarrasser de la partie dénombrable D précédente : il suffit en fait de démontrer que $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S} \setminus D$. En effet, si $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S} \setminus D$ alors comme la relation d'équidécomposabilité est transitive (c'est même une relation d'équivalence) et que $\mathbb{S} \setminus D$ est paradoxal, alors $\mathbb{S} \setminus D \supset A \sqcup B$ avec $A \equiv \mathbb{S} \setminus D$ et $B \equiv \mathbb{S} \setminus D$ donc on aura $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S} \setminus D \equiv A$ et $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S} \setminus D \equiv B$, i.e. $\mathbb{S} \equiv A$ et $\mathbb{S} \equiv B$ avec $\mathbb{S} \supset A \sqcup B$, i.e. $\mathbb{S}$ est paradoxale.

Théorème 11. *La sphère $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ est paradoxale.*

Idée de la démonstration. On reprend les notations de la démonstration de paradoxe de Hausdorff. L'ensemble $\mathbb{S} \setminus D$ est non vide, donc on peut y trouver un point x_0. Par construction $D = -D$ donc $-x_0$ est aussi dans $\mathbb{S} \setminus D$. On considère $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des angles de $[0, 2\pi[$ des rotations r d'axe (Ox_0) telles que r^n envoie un élément de D sur un autre élément de D et on pose $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{A}_n$. D étant dénombrable, $\mathcal{A}_n$ l'est aussi et donc $\mathcal{A}$ l'est également : on peut donc trouver α dans $[0, 2\pi[\setminus \mathcal{A}$. En notant r la rotation d'axe (Ox_0) d'angle α, on considère $\widetilde{D} = D \sqcup \bigsqcup_{n \geqslant 1} (r^n.D)$ (l'union est bien disjointe par choix de α). Le deuxième ensemble du membre de droite est égal à $r.\widetilde{D}$, et on a donc $\mathbb{S} = (\mathbb{S} \setminus \widetilde{D}) \sqcup D \sqcup (r.\widetilde{D})$. On a alors $\mathbb{S} \setminus D = (\mathbb{S} \setminus \widetilde{D}) \sqcup (r.\widetilde{D})$: or, on a par définition $\widetilde{D} \overset{1}{\equiv} (r.\widetilde{D})$ et finalement,

$$\mathbb{S} \setminus D = (\mathbb{S} \setminus \widetilde{D}) \sqcup (r.\widetilde{D}) \equiv (\mathbb{S} \setminus \widetilde{D}) \sqcup \widetilde{D} = \mathbb{S}.$$

D'où $\mathbb{S} \equiv \mathbb{S} \setminus D$ et donc $\mathbb{S}$ est paradoxale. $\square$

4 Le cas de la boule unité $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^3$: le paradoxe de Banach-Tarski

En remplaçant chaque point $M \in \mathbb{S}$ par le rayon $]OM]$, on démontre le résultat suivant directement à partir du théorème précédent.

Théorème 12. *La boule épointée $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ est paradoxale sous l'action naturelle du groupe $SO(3)$.*

On a alors envie de dire que $\mathbb{B}$ est également $SO(3)$-paradoxale pour l'action naturelle de $SO(3)$ sur $\mathbb{B}$!

Proposition 13. *La boule $\mathbb{B}$ n'est* pas *paradoxale pour l'action naturelle de $SO(3)$.*

Démonstration. On suppose que c'est le cas ; on a donc $\mathbb{B} \supset C \sqcup D$ avec $C \equiv \mathbb{B} \equiv D$. Cela se traduit par :

$$\begin{cases} C = C_1 \sqcup ... \sqcup C_n \\ \mathbb{B} = B_1^c \sqcup ... \sqcup B_n^c \end{cases} \quad \text{avec } \forall i \in \{1, ..., n\}, B_i^c = c_i.C_i, c_i \in SO(3)$$

$$\begin{cases} D = D_1 \sqcup ... \sqcup D_m \\ \mathbb{B} = B_1^d \sqcup ... \sqcup B_m^d \end{cases} \quad \text{avec } \forall j \in \{1, ..., m\}, B_j^d = d_j.D_j, d_j \in SO(3).$$

Quitte à réindexer, on peut supposer que $0 \in B_1^c$ et que $0 \in B_1^d$. On a donc $C_1 = c_1^{-1}.B_1$ et $D_1 = d_1^{-1}.B_1$: comme chaque élément de $SO(3)$ fixe 0, on en déduit que $0 \in C_1$ et que $0 \in D_1$. Finalement, $0 \in C$ et $0 \in D$ ce qui contredit le fait que ces deux ensembles sont disjoints. $\square$

Cependant, on peut sauver les meubles : on trouve le paradoxe tant attendu.

Théorème 14 (Paradoxe de Banach-Tarski)**.** *La boule $\mathbb{B}$ est paradoxale sous l'action du* groupe des déplacements *de $\mathbb{R}^3$.*

Remarque. Les déplacements de $\mathbb{R}^3$ sont les isométries directes : ce sont les composées de rotations, éléments de $SO(3)$, et de translations. Par la suite, on notera cet ensemble $\mathcal{D}(3)$.

Idée de la démonstration. C'est le même principe que dans la démonstration du théorème 11. On considère la rotation r de centre I et d'angle θ où I est un point à distance $\frac{1}{2}$ de l'origine et θ un multiple irrationnel de π, puis enfin l'ensemble $\mathcal{A} = \{r^n(O)/n \in \mathbb{N}\}$. On a $\mathcal{A} = \{0\} \sqcup r(\mathcal{A})$; $\mathbb{B} = (\mathbb{B} \setminus \mathcal{A}) \sqcup \mathcal{A}$ donc $\mathbb{B} \setminus \{0\} = (\mathbb{B} \setminus \mathcal{A}) \sqcup r(\mathcal{A}) \equiv (\mathbb{B} \setminus \mathcal{A}) \sqcup \mathcal{A} = \mathbb{B}$. La boule et la boule épointée sont donc bien $\mathcal{D}(3)$-équidécomposables (on a $r = t\tilde{r}t^{-1}$ où $\tilde{r} \in SO(3)$ est la rotation d'angle θ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$ donc $r \in \mathcal{D}(3)$). $\square$

Corollaire 15. *On peut découper la sphère $\mathbb{B}$ en un nombre fini de morceaux puis reconstituer avec ces morceaux à l'aide de déplacements deux sphères identiques à $\mathbb{B}$, à une translation près .*

Ce corollaire est en fait une simple réécriture du fait que $\mathbb{B}$ est paradoxale. On remarque ce cela ne coûte pas plus cher de ne plus supposer la sphère initiale centrée et normée : il suffit de se ramener à $\mathbb{B}$ par une translation et une homothétie.

On peut donc trouver deux parties disjointes C et D de $\mathbb{B}$ qui sont toutes les deux $\mathcal{D}(3)$-équidécomposables à $\mathbb{B}$. Par définition on peut partitionner C en un nombre fini de morceaux (disjoints) $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis reconstituer $\mathbb{B} = \bigsqcup_{i=1}^n B_i^c$ avec des déplacements (pour tout $i \in \{1, ..., n\}, B_i = c_i C_i$ avec $c_i \in \mathcal{D}(3)$). On a la même chose pour $D = \bigsqcup_{j=1}^m D_j$.

Corollaire 16. *Avec les notations précédentes, il existe au moins deux morceaux C_i ou deux morceaux D_j qui ne sont pas mesurables pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration. On suppose dans un premier temps que tous les C_i et tous les D_j sont Lebesgue-mesurables. La partie $C = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$ est donc Lebesgue-mesurable, et on a $\lambda(C) = \sum_{i=1}^n \lambda(C_i)$. Pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$ on a $B_i^c = c_i.C_i$: comme la mesure de Lebesgue est invariante par les déplacements de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que les B_i^c sont mesurables et $\lambda(B_i^c) = \lambda(C_i)$ pour tous les indices i. On a donc $\lambda(C) = \lambda(\mathbb{B})$; de même, on a $\lambda(D) = \lambda(\mathbb{B})$. Or, $C \sqcup D \subset B$ donc $\lambda(C) + \lambda(D) \leqslant \lambda(\mathbb{B})$ d'où $2\lambda(\mathbb{B}) = \lambda(\mathbb{B})$. C'est absurde car $\lambda(\mathbb{B}) = \frac{4\pi}{3} \notin \{0, +\infty\}$!

Il existe donc au moins un C_i ou un D_j qui est non mesurable ; on en déduit alors le résultat annoncé. □

5 Le cas d'ensembles bornés d'intérieurs non vides

Dans cette section, l'action de groupe dont il est question est l'action naturelle de $\mathcal{D}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ par isométries. À l'aide des résultats de la section précédente et du théorème 4, on peut montrer la proposition suivante.

Proposition 17. *Deux boules fermées de $\mathbb{R}^3$ de rayons strictement positifs sont équidécomposables.*

On récupère alors le théorème suivant.

Théorème 18. *Deux ensembles bornés et d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables.*

Démonstration. Soient E et F de tels ensembles. Ces deux ensembles sont bornés, il sont donc contenus dans une grosse boule fermée B. De plus, E est d'intérieur non vide donc on peut y coincer une petite boule ouverte de rayon strictement positif ; en considérant la boule fermée B_E de rayon moitié, on a $B_E \subset E$. D'après la proposition énoncée ci-avant, les deux boules B et B_E sont équidécomposables. Ainsi E est équidécomposable à $E \subset B$ et B est équidécomposable à $B_E \subset E$. D'après le théorème 4, on peut conclure que E et B sont équidécomposables. De même, on montre que F et B sont équidécomposables. Finalement, E et F sont équidécomposables ! □

6 Mesures universelles

6.1 Lien avec le paradoxe de Banach-Tarski

Le paradoxe de Banach-Tarski nous sert sur un plateau le théorème suivant.

Théorème 19. *Il n'y a pas de mesure universelle finiment additive sur* $\mathbb{R}^3$ *qui soit invariante sous l'action de* $\mathcal{D}(3)$ *et normalisée sur le cube unité.*

Démonstration. Soit μ une telle mesure. En coupant le cube unité $C := [0,1]^3$ en deux parties (par exemple par le plan $x = \frac{1}{2}$), ces deux parties disjointes sont des bornés d'intérieurs non vides donc toutes deux $\mathcal{D}(3)$-équidécomposables à C. Donc C est $\mathcal{D}(3)$-paradoxal ; par le même raisonnement que dans la preuve du corollaire 16, on trouve que $2\mu(C) \leqslant \mu(C)$ ce qui est absurde puisque $\mu(C) = 1$. $\square$

Théorème 20. *Pour* $n \geqslant 3$*, il n'y a pas de mesure universelle finiment additive sur* $\mathbb{R}^n$ *qui soit invariante sous l'action de* $\mathcal{D}(n)$ *et normalisée sur le cube unité.*

Remarque. L'ensemble $\mathcal{D}(n)$ désigne l'ensemble des déplacements de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'ensemble des isométries affines qui ont une partie linéaire de déterminant (strictement) positif.

Démonstration. Soit μ est une telle mesure ; on considère l'application $\nu : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty]$ définie par $\nu(A) = \mu(A \times [0,1]^{n-3})$. Alors ν est une mesure universelle finiment additive invariante sous l'action de $\mathcal{D}(3)$ et normalisée sur le cube unité $[0,1]^3$, ce qui est absurde d'après le théorème précédent. $\square$

6.2 En dimensions 1 et 2

Le paradoxe de Banach-Tarski cesse d'être valable dès que l'on passe en dessous de la dimension 3. La chose qui a changé par rapport à la dimension 3 est que $SO(2)$ ne contient pas de sous-groupe *libre* à 2 générateurs : en effet, $SO(2)$ est commutatif. L'ingrédient essentiel de la preuve du paradoxe de Hausdorff n'est donc plus utilisable ! Ainsi, on peut montrer le résultat suivant.

Théorème 21. *Il existe une mesure universelle finiment additive sur* $\mathbb{R}^2$ *invariante par les isométries et normalisée sur le carré unité.*

On a les même résultats en dimension 1 car $SO(1)$ est bien sur également commutatif (c'est même le groupe trivial).

Références

[1] Marc GUINOT, « Le paradoxe de Banach-Tarski », ALEAS Editeur, 1991

[2] Pierre DE LA HARPE, « Mesures finiment additives et paradoxes ». Article issu de *Autour du centenaire de Lebesgue*, Société Mathématique de France, 2004

[3] Stan WAGON, « The Banach-Tarski Paradox », Cambridge University Press