M2 Analyse et Applications
Analyse dans l'espace des phases

Cours de Karel Pravda-Starov, tapé par Salim Rostam

Université Rennes 1, premier semestre 2014–2015

1 Introduction aux opérateurs pseudo-différentiels

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.1. Un *opérateur différentiel* d'ordre $m \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$ est un opérateur de la forme

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathrm{D}_x^\alpha$$

où a_α sont des fonctions régulières, $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{D}_{x_j} := \frac{1}{2i\pi}\partial_{x_j}$.

Remarque 1.2. Attention, parfois le coefficient de D_{x_j} change (cf. normalisation de la transformée de Fourier).

On remarque que $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), Pu(x) = a(x, \mathrm{D}_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(x)\,\mathrm{d}\xi$ où $a(x,\xi) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ est le *symbole* de P et $\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{-2i\pi y\xi}\,\mathrm{d}y$. En effet, $\widehat{\mathrm{D}_x^\alpha u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (D_x^\alpha)(x) e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)(-\mathrm{D}_x)^\alpha e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\xi^\alpha e^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$. donc $\widehat{\mathrm{D}_x^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$.

Ainsi, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\xi x} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = Pu$.

L'idée de l'analyse microlocale est d'étudier les opérateurs pseudo-différentiels via leur symbole : transferts de propriétés,...

Il est possible de généraliser cette formule au cas où le symbole a est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}$. Plus précisément, soit $\Omega : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ qui à (u,v) associe $\Omega_{u,v}$ où :

$$\Omega_{u,v}(x,\xi) := \hat{u}(\xi)\overline{v(x)}e^{-2i\pi x\xi}$$

L'application Ω est sesquilinéaire continue. La sesquilinéarité est claire, et pour la continuité : $x^{\alpha_1}\xi^{\beta_1}\partial_x^{\alpha_2}\partial_\xi^{\beta_2}(\Omega_{u,v})(x,\xi) = x^{\alpha_1}\xi^{\beta_1}\partial_x^{\alpha_2}(\overline{v(x)}\sum_{\gamma_1+\gamma_2=\beta_2}\partial_\xi^{\gamma_1}\hat{u}(\xi)(2i\pi x)^{\gamma_2}e^{2i\pi x\xi})$ donc $|x^{\alpha_1}\xi^{\beta_1}\partial_x^{\alpha_2}\partial_\xi^{\beta_2}(\Omega_{u,v})(x,\xi)| \leq \sum_{\text{finie}} c_{\alpha,\beta,\eta,\zeta,\nu}|x^\alpha\xi^\beta\partial_x^\eta\overline{v}(x)\partial_\xi^\nu\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|(\hat{u}\|_{\mathcal{S}}\|\overline{v}\|_{\mathcal{S}} \leq \|u\|\|v\|$ (attention, ce sont des semi-normes).

Définition 1.3. Soit $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. On définit l'opérateur suivant :

$$a(x, \mathrm{D}x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$$

où $\mathcal{S}^*$ est l'antidual (*i.e.* l'ensemble des formes anti-linéaires continues), défini par la formule suivante :

$$\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle a(x,\mathrm{D}x)u, v\rangle_{\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n),\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} := \langle a, \Omega_{u,v}\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}),\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})}$$

La distribution a est appelé *symbole* de l'opérateur $a(x, \mathrm{D}x)$.

Propriété 1.4. *L'opérateur* $a(x, \mathrm{D}x)$ *est continu.*

Démonstration. Comme $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \exists c > 0, \exists k \geq 0, |\langle a, \Omega_{u,v}\rangle| \leq c \sup_{|\alpha|,|\beta|\leq k,x,\xi} |x^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}\partial_x^{\beta_1}\partial_\xi^{\beta_2}\Omega_{u,v}(x,\xi)|$ $\overline{\text{c}^{\text{o}} \text{ de } \Omega} \leq \tilde{c}(\sup_{|\alpha_1|\leq k_1,|\beta_1|\leq k_2,x} |x^{\alpha_1}\partial_x^{\beta_1}u|)(\sup_{|\alpha_2|\leq k_2,|\beta_2|\leq k_2,x} |x^{\alpha_1}\partial_x^{\beta_2}v|)$. Ainsi, si $u_n \to 0$ (dans $\mathcal{S}$) alors $\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle a(x,\mathrm{D}x)u_n, v\rangle \to 0$. □

Cette définition est en fait un peu trop générale ; on va considérer des symboles plus réguliers (en particulier on veut pouvoir composer).

On considère l'espace de Fréchet $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ bornées ainsi que toutes leurs dérivées, muni des semi-normes :

$$p_k(f) := \sup_{x,|\alpha|\leq k} |\partial_x^k f(x)|$$

Théorème 1.5. *Soit $a \in \mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. L'opérateur pseudo-différentiel $a(x,\mathrm{D}x)$ défini précédemment est continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), a(x,\mathrm{D}x)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Remarque 1.6. On prend la transformée de Fourier de u, on multiplie par le symbole et on fait la transformée de Fourier inverse.

Démonstration. $\langle a(x,\mathrm{D}x)u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle a, \Omega_{u,v}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \overset{a\in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}}{=} \int a(x,\xi)\Omega_{u,v}(x,\xi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi$
$= \int a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\overline{v(x)}e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi$. On définit $U(x) := \int e^{2i\pi x\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Cela a bien un sens car a est bornée et $u \in \mathcal{S}$ donc $\hat{u} \in \mathcal{S}$ donc en faisant apparaître un $\frac{(1+|xi|^2)^n}{(1+|xi|^2)^n}$ on montre l'intégrabilité. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale (ça va marcher d'après les propriétés de a), la fonction U est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$x^\alpha \mathrm{D}_x^\beta U(x) = x^\alpha \sum_{\gamma+\gamma'=\beta} \frac{\beta!}{\gamma!\gamma'!} \int \mathrm{D}_x^\gamma(e^{2i\pi x\xi})\mathrm{D}_x^{\gamma'} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$
$= \sum_{\gamma+\gamma'=\beta} \frac{\beta!}{\gamma!\gamma'!} \int \underbrace{x^\alpha e^{2i\pi x\xi}}_{\mathrm{D}_\xi^\alpha(e^{2i\pi x\xi})} (\mathrm{D}_x^{\gamma'} a)(x,\xi)\xi^\alpha\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}x$

$\overset{\text{IPP}}{=} \sum_{\gamma+\gamma'=\beta} \frac{\beta!}{\gamma!\gamma'!} \int e^{2i\pi x\xi}(-\mathrm{D}_\xi)^\alpha \left[(\mathrm{D}_x^{\gamma'} a)(x,\xi)\underbrace{\xi^\gamma\hat{u}(\xi)}_{\widehat{D_x^\gamma u}(\xi)}\right]$ et en appliquant encore une fois Leibniz on réussi à majorer $\sup_x |x^\alpha \mathrm{D}_x^\beta U(x)|$, en utilisant les hypothèses sur a, en utilisant que Fourier et la dérivation sont continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ on réussit à montrer que $U \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Or, on a $\langle a(x,\mathrm{D}x)u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} U(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \langle U, v\rangle$ donc on a $U = a(x,\mathrm{D}_x)u$ CQFD. □

Remarque 1.7. On a $\langle u, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle u, \overline{\phi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ (cf. intégrales).

Remarque 1.8. L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ n'est *pas* dense dans l'espace de Fréchet $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. En effet, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}), \sup |1-\phi| \geq 1$ car $\phi(x) \xrightarrow{\|x\|\to\infty} 0$. En revanche, si $a \in \mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ on peut définir (où $k \in \mathbb{N}^*$) :

$$a_k(x,\xi) := a(x,\xi)e^{-\frac{1}{k^2}(|x|^2+|\xi|^2)}$$

et cette fois on a $a_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mieux que cela, la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ est bornée dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, c'est-à-dire $\forall \alpha \in \mathcal{N}^{2n}, \sup_{(x,\xi),k\geq 1} |\partial_{x,\xi}^\alpha a_k(x,\xi)| < \infty$. Pour cela, on écrit que $e^{-\frac{1}{k^2}(|x|^2+|\xi|^2)} = G(\frac{x}{k}, \frac{\xi}{k})$ où $G(x,\xi) := e^(- |x|^2 - |\xi|^2)$ et on conclut.

De plus, $a_k \to a$ dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, *i.e.* $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^{2n}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \sup_{(x,\xi)\in K} |(\partial_{x,\xi}^\alpha a_k)(x,\xi) - (\partial_{x,\xi}^\alpha a)(x,\xi)| \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Lemme 1.9. *Soit (a_k) une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ telle que :*

- *la suite (a_k) est bornée dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$;*
- *on a la convergence $a_k \to a$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.*

Alors $a \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n})$ et $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), a_k(x, \mathrm{D}x)u \xrightarrow{\mathcal{S}} a(x, \mathrm{D}x)u$

Démonstration. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \sup_{k\geq 1,(x,\xi)} |\partial^\alpha_{x,\xi} a_k(x,\xi) = c_\alpha < \infty$ (caractère borné de (a_k)). La deuxième hypothèse fournit notamment la convergence simple sur $\mathbb{R}^{2n}$ de toutes les dérivées. Ainsi, $\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |\partial^\alpha_{x,\xi} a(x,\xi)| \leq c_\alpha$ donc $a \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$. Il reste à montrer la convergence annoncée dans le théorème.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. On a $x^\alpha \mathrm{D}^\beta_x(a_k(x, \mathrm{D}_x)u) - x^\alpha \mathrm{D}^\beta_x a(x, \mathrm{D}_x)u) = x^\alpha \mathrm{D}^\beta_x((a_k - a)(x, \mathrm{D}_x)u)$. En réutilisant une formule de la preuve précédente (que je n'ai pas écrite donc je ne vais pas l'écrire ici non plus), en utilisant le fait que $(1 + |D_\xi|^2)(e^{2i\pi x\xi}) = (1 + |x|^2)e^{2i\pi x\xi}$ (où $|D_\xi|^2 = \sum \mathrm{D}^2_{\xi_k}$), on remplace le terme oscillant de l'intégrale (*i.e.* l'exponentielle complexe) d'après cette formule pour finalement trouver (+ IPP)

$$x^\beta \mathrm{D}^\alpha_x(a_k(x, \mathrm{D}_x)u - a(x, \mathrm{D}_x)u) = \sum_{\text{finie}} \frac{1}{1 + |x|^2} \int e^{2i\pi x\xi} b_k(x,\xi) w_u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum v_k(x)$$

où (b_k) est bornée dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ et tend vers 0 dans $\mathcal{C}^\infty$ et l'application $\mathcal{S} \ni u \mapsto w_u \in \mathcal{S}$ est continue.

On se donne maintenant $R_1, R_2 > 0$. On a $v_k = v_k \mathbf{1}_{|x|\leq R_1} + v_k|\mathbf{x}| > \mathbf{R_2} = A(x) + B(x)$. On a $|B(x)| \leq \mathbf{B}_{|x|>R_1} \frac{1}{R_1^2} \int |b_k(x,\xi)||w_u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leq \frac{1}{R_1^2} ||b_k||_{\mathrm{L}^\infty} \underbrace{\int |w_u(\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{<\infty \text{ car } w_u \in \mathcal{S} \subseteq \mathrm{L}^1}$. De plus, $A = A_1 + A_2$ avec $A_1 := \frac{\mathbf{1_{|x|\leq R_1}}}{1+|x|^2} \int_{|\xi\|\leq R_2} \cdots$, $A_2 :=$ le reste. On a $|A_1(x)| \leq (\sup_{\substack{|x|\leq R_1 \\ |\xi|\leq R_2}} |b_k(x,\xi)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |w_u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi}_{=c_0<\infty}$, $|A_2(x)| \leq \int_{|\xi|>R_2} \|b_k\|_{\mathrm{L}^\infty} |w_u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$. Soit maintenant $\epsilon > 0$ et on choisit $R_1 > 0$ tel que $\sup_x |B(x)| \leq \frac{c_1}{R_1^2} < \frac{\epsilon}{3}$ puis $R_2 > 0$ tel que $\sup_x |A_2(x)| \leq (\sup_k \|b_k\|_{\mathrm{L}^\infty}) \int_{|\xi|>\mathbb{R}_2} |w_u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi < \frac{\epsilon}{3}$ (le premier bout est borné et l'autre tend vers 0). Or, $\sup_{\substack{|x|\leq R_1 \\ |\xi|\leq R_2}} |b_k(x,\xi)| \to 0$ car $b_k \to 0$ dans $\mathcal{C}^\infty$. On a finalement bien montré que $a_k(x, \mathrm{D}_x)u \to a(x, \mathrm{D}_x)u$ dans $\mathcal{S}$. $\square$

Remarque 1.10. Les théorèmes sont un peu horribles à démontrer, mais du coup après ça va être très agréable de travailler.

Théorème 1.11. *Si $a \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$ alors il existe $c > 0$ tel que :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|a(x, \mathrm{D}_x)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on peut prolonger de manière unique l'opérateur $a(x, \mathrm{D}_x)$ en un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie :

$$\forall u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n), \|a(x, \mathrm{D}_x)u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|a(x, \mathrm{D}_x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n))} \|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

Remarque 1.12. La formule $a(x, \mathrm{D}_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ si $a \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n})$ est valide si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mais plus forcément si $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (prendre $a \equiv 1$: l'intégrale n'est plus nécessairement *absolument* convergente).

Démonstration. D'après la densité de l'espace de Schwartz dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, il suffit de démontrer que $\exists c > 0, \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle a(x, \mathrm{D}_x)u, v\rangle_{\mathrm{L}^2} \leq c\|u\|_{\mathrm{L}^2}\|v\|_{\mathrm{L}^2}$. On définit $p_k(t) := (1 + |t|^2)^{k/2}$ où k est un entier pair $> \frac{n}{2}$, $t \in \mathbb{R}^n$ ainsi que $w_u(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y)p_k(x - y)^{-1} e^{-2i\pi y\xi}\,\mathrm{d}y$. (On peut remarquer que w_u est la transformée de Fourier partielle de $(x, y) \mapsto u(y)p_k(x - y)^{-1}$ (c'est la transformée de Fourier habituelle évaluée en $(\xi, 0)$).) On montre que $w_u \in \mathcal{C}^\infty$: on utilise pour cela théorème de dérivation sous l'intégrale, qui fonctionne grâce à $u \in \mathcal{S}$ et la définition de p_k, et également $1 + |x| \leq$

$1+|y|+|x-y| \leq (1+|y|)(1+|x-y|)$. De plus, on montre que $\sup_{x,\xi} |(1+|x|)^k \xi^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta w_u(x,\xi)| < \infty$ (on dit que $\xi^\gamma e^{-2i\pi y\xi} = (-\mathrm{D}_y)^\gamma (e^{-2i\pi y\xi})$ + IPP bien sûr) ceci $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$.

Montrons que $w_u \in \mathrm{L}^2$: $\int |w_u(x,\xi)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi \leq \sup_{x,\xi}((1+|x|)^\beta \langle\xi\rangle^n |w_u(x,\xi)|) \int \frac{1}{(1+|x|)^k \langle\xi\rangle} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}xi$. (Où $\langle xi\rangle^2 := \sum \xi_i^2$.)

On a alors $\|w_u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})} = \int_{\mathbb{R}^n} \|w_u(x,\cdot)\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_\xi)} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \|u(y)p_k(x-y)^{-1}\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_y)} \,\mathrm{d}x = \iint |u(y)|^2 |p_k(x-y)|^{-2} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^2 (\int_{\mathbb{R}^n} |p_k(x-y)|^{-2} \,\mathrm{d}x) \,\mathrm{d}y) = (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^k} \,\mathrm{d}x) \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ donc finalement $\|w_u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq c\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$.

On a $\Delta := \langle a(x,\mathrm{D}_x)u, v\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$

$= \iint a(x,\xi)\overline{v(x)} e^{2i\pi x\xi} (\int u(y) e^{-2i\pi y\xi} \,\mathrm{d}y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi$. On a $p_k(t) = (1+|t|^2)^{k/2} = \sum_{e=0}^{k/2} \binom{k/2}{e} |t|^e$ d'où $p_k(\mathrm{D}_\xi)(e^{2i\pi(x-y)\xi}) = p_k(x-y)e^{2i\pi(x-y)\xi})$ (on rappelle que $|D_\xi|^2 := \sum |D_{\xi_i}|^2$) et ainsi $e^{2i\pi(x-y)\xi} = (p_k(x-y))^{-1} p_k(\mathrm{D}_\xi)(e^{2i\pi(x-y)\xi})$. Finalement, $\Delta = \iiint a(x,\xi)\overline{v}(x)u(y)(p_k(x-y))^{-1} p_(\mathrm{D}_\xi)(e^{2i\pi(x-y)\xi}) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y$ et par intégration par parties (par rapport à ξ) on trouve :

$\Delta = \iint e^{2i\pi x\xi}\overline{v}(x)[p_k(\mathrm{D}_\xi)a](x,\xi)(\underbrace{\int u(y)p_k(x-y)^{-1}e^{-2i\pi y\xi}\,\mathrm{d}y)}_{w_u(x,\xi)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi$.

On remarque que $e^{2i\pi x\xi}\overline{v}(x) = \int e^{2i\pi x(\xi-\eta)}\overline{\hat{v}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ donc $\frac{1}{p_k(\xi-\eta)} p_k(\mathrm{D}_x)(e^{2i\pi x(\xi-\eta)}) = e^{2i\pi x(\xi-\eta)}$. Ainsi :

$$\Delta = \iint [p_k(\mathrm{D}_x)a](x,\xi) w_u(x,\xi) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} p_k(D_x) e^{2i\pi x(\xi-\eta)} p_k(x-y)^{-1} \overline{\hat{v}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)}_{p_k(\mathrm{D}_x)\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x(\xi-\eta)} p_k(\xi-\eta)^{-1}\overline{\hat{v}}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)}_{e^{2i\pi x\xi} w_u(\overline{\hat{v}})(\xi,x)}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi$$

On distribue ensuite les dérivées de $p_k(\mathrm{D}_x)$; il se trouve que l'on doit montrer que $\|D_x^\gamma(w_u)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{\mathrm{L}^2}$ (*i.e.* $\leq c\cdot$). On trouve alors $\|w_{\overline{\hat{v}}}\|_{\mathrm{L}^2} \lesssim \|v\|_{\mathrm{L}^2}$. Reste à montrer notre inégalité ; on a $\mathrm{D}_x^\gamma(w_u)(x,\xi) = \int u(y)\mathrm{D}_x^\gamma(\frac{1}{p_k})(x-y)e^{-2i\pi y\xi}\,\mathrm{d}y$ et comme précédemment on a $\|\mathrm{D}_x^\gamma(w_u)\|^2_{\mathrm{L}^2} = \|u(y)\mathrm{D}_x^\gamma(\frac{1}{p_k})(x-y)\|^2_{\mathrm{L}^2} = \|u\|^2_{\mathrm{L}^2}\|D_x^\gamma(w_u)\|^2_{\mathrm{L}^2}$. Or, $|D_t^\gamma(\frac{1}{p_k})| = \mathcal{O}(\langle t\rangle^{-t})$, $k > \frac{n}{2}$ et $\|D_x^\gamma(\frac{1}{p_k})\|^2_{\mathrm{L}^2}\mathcal{O}(\int(\frac{1}{\langle t\rangle^{2k}}\,\mathrm{d}t) < \infty$ ☐

Remarque 1.13. Le nombre de dérivées nécessaires au contrôle de la norme d'opérateur $\|a(x,\mathrm{D}_x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n))}$ est donnée par :

$$\|a(x,\mathrm{D}_x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n))} \leq c_n \sup_{\substack{|\alpha|\leq k\\|\beta|\leq k}} \|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{2n})}$$

où c_n est une constante universelle ne dépendant que de la dimension est k un entier pair $> \frac{n}{2}$.

Par exemple, pour $n=1$ on prend $k=2$ d'où contrôle de la norme de $a(x,\mathrm{D}_x)$ dans L^2 par des semi-normes du symbole a avec des dérivées d'ordre ≤ 4.

1.2 Transformée de Fourier de gaussiennes

L'ensemble $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ est étoilé par rapport à 1. On peut définir la détermination principale du logarithme par $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-, \log z := \oint_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \int_0^1 \frac{z-1}{(1-t)+tz}\,\mathrm{d}t = \ln|z| + i\arg z$. La fonction log est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ et $\forall x > 0, \log x = \ln x$. Par prolongement analytique, on a $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-, e^{\log z} = z$ et $\forall z \in \mathbb{C}, |\Im z| < \pi, \log e^z = z$.

Soit γ_+ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ *symétriques* (pas hermitiennes) inversibles telles que $\Re A := \frac{A+\overline{A}}{2}$ est positive (pas forcément définie positive).

Remarque 1.14. On a $A = \Re A + i\Im A$ où $\Re A, \Im A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Im A = \frac{A-\overline{A}}{2i}$. Le fait que A est symétrique implique que $\Re A$ et $\Im A$ sont symétriques.

L'ensemble γ_+ est étoilé par rapport à I_n, *i.e.*

$$\forall A \in \gamma_+, [I_n, A] := \{(1-t)I_n + tA : t \in [0,1]\} \subseteq \gamma_+$$

Grâce à cette propriété, on peut définir :

$$\forall A \in \gamma_+, \log A := \int_0^1 (A - I_n)(I_n + t(A - I_n))^{-1} \,\mathrm{d}t$$

On vérifie que :

$$\forall A \in \gamma_+, e^{\log A} = A$$

Il s'ensuit que $\forall A \in \gamma_+, \det A = e^{\operatorname{tr} \log A}$, et on peut ainsi définir :

$$(\det A)^{-1/2} := e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \log A} = |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{2} \Im \operatorname{tr} \log A}$$

Exemple 1.15. Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $(\det A)^{-1/2} = |\det A|^{-1/2}$.

Exemple 1.16. Si $A = -iB$ avec $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible ; on peut diagonaliser B : $B = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\mu_j)$ diagonale et P orthogonale. On a $\log A = \log(-iB) = P \log(-iD) P^{-1}$ (utiliser la définition du log) d'où $\operatorname{tr} \log A = \operatorname{tr} \log(-iD) = \operatorname{tr} \operatorname{diag}(\log(-i\mu_j)) = \sum_{j=1}^n \log(-i\mu_j)$. On utilise maintenant $\log z = \ln |z| + i \arg z$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Ainsi, $\Im \operatorname{tr} \log A = \sum_{j=1}^n \underbrace{\arg(-i\mu_j)}_{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\mu_j)} = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(B)$

où sgn désigne la signature. Ainsi, $\det(A)^{-1/2} = |\det B|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(B)}$.

Proposition 1.17. *Soit $A \in \gamma_+$. La transformée de Fourier de la gaussienne*

$$v_A(x) := e^{-\pi\langle Ax, x\rangle} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

est donnée par :

$$\widehat{v_A}(\xi) = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

où $\det(A)^{-1/2}$ est la quantité définie précédemment. Si $A = -iB$ avec $B \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ inversible, on a ainsi :

$$\mathcal{F}\left(e^{i\pi\langle Bx, x\rangle}\right)(\xi) = \widehat{v_{-iB}}(\xi) = |\det B|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} sgn(B)} e^{-i\pi\langle B^{-1}\xi, \xi\rangle}$$

Démonstration. [2, theorem 7.5, volume 1] ou [4, prop. 4.11] □

Lemme 1.18. *Soient $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur :*

$$J^t := e^{2i\pi t \mathrm{D}_x \cdot \mathrm{D}_\xi} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$$

de la façon suivante :

$$\forall a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}), \mathcal{F}(J^t a)(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = e^{2i\pi t \tilde{x}\tilde{\xi}} (\mathcal{F}a)(\tilde{x}, \tilde{\xi})$$

On a les propriétés suivante :

1. $J^t : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ *est continue ;*
2. $\forall a \in \mathcal{S}', \forall t, s \in \mathbb{R}, J^{t+s} a = J^t(J^s a)$
3. $J^t \Big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})}$ *est à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$ et est continue ;*
4. $\forall a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}), \forall t \in \mathbb{R}^*$:

$$(J^t a)(x, \xi) = e^{i\pi t\langle B \mathrm{D}_{x,\xi}, \mathrm{D}_{x,\xi}\rangle} a = \left(\frac{1}{|t|^n} e^{-i\frac{\pi}{t}\langle B\cdot, \cdot\rangle} * a\right)(x, \xi) = \frac{1}{|t|^n} \iint e^{-\frac{2i\pi y\cdot\eta}{t}} a(x+y, \xi+\eta) \,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

avec $B := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ *;*

5. *J^t envoie $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$ dans $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$.*

Remarque 1.19. $\mathrm{D}_x := \frac{1}{i}\nabla_x = \frac{1}{i}\partial_x$; $\mathrm{D}_{x,\xi} = \frac{1}{i}\nabla_{x,\xi} = \frac{1}{i}\partial_{x,\xi}$;-)

Démonstration. 1. Ok car $\mathcal{F}$ est continue sur $\mathcal{S}'$ ainsi que la multiplication par une fonction à croissance modérée.

2. On applique deux fois la définition de J et on utilise la propriété fondamentale de l'exponentielle.
3. Si $a \in \mathcal{S}$ alors par le théorème de dérivation sous le signe somme on obtient que $J^t \in \mathcal{C}^\infty$. On écrit :
$$\mathrm{D}_x(J^t a)(x,\xi) = \frac{1}{|t|^n}\iint \underbrace{\mathrm{D}_x(e^{-\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)}}_{-\mathrm{D}_y(e^{-\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)})} a(y,\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$
et par une IPP on obtient $\frac{1}{|t|^n}\iint e^{\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)}\mathrm{D}_y a(y,\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$. On a alors :
$$\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_\eta^\beta = \frac{1}{|t|^n}\iint e^{-\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)}\mathrm{D}_y^\alpha \mathrm{D}_\eta^\beta a(y,\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$
Pour montrer que l'on est dans $\mathcal{S}$, il reste à montrer le comportement par rapport à la multiplication par des puissances de x,ξ. Pour cela, on utilise le fait que $\frac{(x-y)}{t}e^{-\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)} = \mathrm{D}_\eta(e^{-\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)})$ d'où une expression pour $xe^{-\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)}$. Fort de cela on en déduit le résultat (par IPP :-)).
4. On a $J^0 = \mathrm{id}$ donc on peut supposer $t \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{F}(J^t a)(x,\xi) = e^{2i\pi t x\xi}(\mathcal{F}a)(x,\xi) = e^{i\pi\langle B(x,\xi),x,\xi\rangle}(\mathcal{F}a)(x,\xi)$. On a B symétrique réelle et $B^2 = \mathrm{I}_{2n}$; ainsi, si λ est valeur propre de B alors $\lambda = \pm 1$. Comme $\operatorname{tr} B = 0$ on en déduit que $\operatorname{sgn}(B) = 0$ (*i.e.* autant de 1 que de -1 dans le spectre) et que $\det B = (-1)^n$ (produit des valeurs propres). Montrons que $\mathcal{F}^{-1}(e^{i\pi\langle B\Xi,\Xi\rangle})(X) = \frac{1}{|t|^n}e^{-i\frac{\pi}{t}\langle BX,X\rangle}$. Or, $\mathcal{F}(\frac{1}{|t|^n}e^{-i\frac{\pi}{t}\langle BX,X\rangle})(\Xi) \underset{\text{prop}}{=} \frac{1}{|t|^n}|\det(-B/t)|^{-1/2}e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(B)}e^{-i\pi\langle -tB^{-1}\Xi,\Xi\rangle} = e^{i\pi t\langle B\Xi,\Xi\rangle}$.
<u>Rappel</u> : Si $T \in \mathcal{S}', \psi \in \mathcal{S}$ alors $\psi * T \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{C}^\infty$ et $\mathcal{F}(\psi * T) = \widehat{\psi}\widehat{T}$ dans $\mathcal{S}'$.
Si $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$, $J^t a = \mathcal{F}^{-1}(e^{i\pi\langle B\Xi,\Xi\rangle}(\mathcal{F}a)\Xi)) = \mathcal{F}^{-1}(e^{i\pi\langle B\cdot,\cdot\rangle}) * a = \frac{1}{|t|^n}(e^{-i\frac{\pi}{t}\langle B\cdot,\cdot\rangle} * a)(x,\xi) = \frac{1}{|t|^n}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\frac{\pi}{t}\langle B(y,\eta),(y,\eta)\rangle}a(x-y,\xi-\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = \frac{1}{|t|^n}\iint e^{-\frac{2i\pi y\eta}{t}}a(x+y,\xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$.
5. Tout d'abord, $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty \subseteq \mathcal{S}'$ donc J^t y est bien définie. Posons, pour $a \in \mathcal{S}$ (oui oui) la quantité $p_{k,t}(y) := (1+t^2|y|^2)^{k/2}$ où $k > n$ est un entier pair. On a $J^t a(x,\xi) = \frac{1}{|t|^n}\iint e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}a(x+y,\xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$. De plus, $p_{k,1}(y)^{-1}p_{k,t}(\mathrm{D}_\eta)(e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}) = e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}$ et $p_{k,1}(\eta)^{-1}p_{k,t}(\mathrm{D}_y)(e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}) = e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}$.
Ainsi, $J^t a(x,\xi) = \frac{1}{|t|^n}\iint p_{k,1}(\eta)^{-1}p_{k,t}(\mathrm{D}_y)(e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta})a(x+y,\xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$
$\underset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{|t|^n}\iint e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}p_{k,1}(\eta)^{-1}(p_{k,t}(\mathrm{D}_y)a)(x+y,\xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$
$= \frac{1}{|t|^n}\iint p_{k,1}(y)^{-1}p_{k,t}(\mathrm{D}_\eta)(e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta})p_{k,1}(\eta)^{-1}(p_{k,t}(\mathrm{D}_y)a)(x+y,\xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$
$= \frac{1}{|t|^n}\iint e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}p_{k,1}^{-1}p_{k,t}(\mathrm{D}_\eta)\left[p_{k,1}(\eta)^{-1}(p_{k,t}(\mathrm{D}_y)a)(x+y,\xi+\eta)\right]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$
En utilisant la formule du binôme dans la définition de $p_{k,t}$ on obtient
$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le k} c_{\alpha,\beta}\iint e^{-\frac{2i\pi}{t}y\eta}\underbrace{T_{\alpha,\beta}(\eta)}_{\lesssim p_{k,1}(\eta)^{-1}}(\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_\xi^\beta a)(x+y,\xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ par la formule de Leibniz. En définissant cette dernière quantité comme étant $\widetilde{J}^t a$, on remarque que $\forall a \in \mathcal{S}, J^t a = \widetilde{J}^t a$. Cependant, comme k est un entier pair $> n$, $\|\widetilde{J}^t a|_{\mathrm{L}^\infty} \le c_n \sup_{|\alpha|,|\beta|\le n+2}\|\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_\xi^\beta\|_{\mathrm{L}^\infty}$ (1) (on prend k égal à $n+1$ ou $n+2$) car $\iint \frac{1}{p_{k,1}(y)p_{k,1}(\eta)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta < \infty$ (par Fubini + $k > n$). Ainsi, l'opérateur $\widetilde{J}^t$ pour t pair $> n$ est défini sur $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})$. Autrement dit, on a prolongé J^t à $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty$! De plus, comme

les dérivations en x, ξ commutent avec l'opérateur $\widetilde{J}^t$ (*i.e.* on peut dériver sous l'intégrale), on déduit de (1) que $\|\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_\xi^\beta \widetilde{J}^t a\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq c_n \sup_{|\widetilde{\alpha}|,|\widetilde{\beta}|\leq n+2} \|\mathrm{D}_x^{\alpha+\widetilde{\alpha}} \mathrm{D}_\xi^{\beta+\widetilde{\beta}} a\|_{\mathrm{L}^\infty}$.

Il s'ensuit que $\widetilde{J}^t$ est continue de $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$ dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$.

Posons $\tilde{\cdot} := \frac{\cdot}{\sqrt{|t|}}$; en particulier, $\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{\eta} = \frac{1}{|t|^n}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$. Ainsi, en notant ϵ le signe de $-t$ on a $J^t a(x,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2i\pi\tilde{y}\tilde{\eta}\epsilon} a(x + \sqrt{|t|}\tilde{y}, \xi + \sqrt{|t|}\tilde{\eta})\,\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\eta$. Rappelons que $p_k(y)$ est défini par $(1+|y|^2)^{k/2}$ où $k > n$ est un entier pair ; ainsi, $p_k(\mathrm{D}_y) = (1+|\mathrm{D}_y|^2)^{k/2}$ où $|\mathrm{D}_y|^2 := \sum \mathrm{D}_{y_j}^2$ et ainsi $p_k(\mathrm{D}_y)$ est un opérateur différentiel (développer avec la formule du binôme). En remplaçant la phase avec les astuces précédentes (on rajoute les dérivées, par exemple $p_k(\epsilon\eta)^{-1} p_t(\mathrm{D}_y)(e^{2i\pi y\eta}) = e^{2i\pi y\eta}$) et par IPP on obtient (on remarque que des puissances de $|t|$ sortent), en utilisant finalement la formule de Leibniz $\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} c_{\alpha,\beta}(t) \iint e^{2i\pi y\eta} T_{\alpha,\beta,t}(\eta)(\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_\xi^\beta a)(x + \sqrt{|t}y, \xi + \sqrt{|t|}\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ avec $c_{\alpha,\beta}(t)$ un polynôme en $\sqrt{|t|}$. Rappelons que cette dernière formule est l'opérateur que l'on a appelé $\widetilde{J}^t a$. On a montré que ce dernière opérateur envoie $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$ dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$ (et est continu) et que J^t et $\widetilde{J}^t$ coïncident sur $\mathcal{S}$.

On va montrer que $J^t a = \widetilde{J}^t a$ pour a dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$ (on rappelle qu'à l'origine J^t est définie sur $\mathcal{S}'$ et ainsi $J^t a$ et bien défini dans $\mathcal{S}'$).

Soit $a \in \mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$. On sait qu'il existe une suite (a_k) d'éléments de $\mathcal{S}$ qui converge vers a dans $\mathcal{C}^\infty$ (cf. une remarque un peu avant dans le cours, on pose $a_k(x,\xi) := e^{-\frac{1}{k^2}(x^2+\xi^2)} a(x,\xi)$) avec de plus (a_k) bornée dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$.

Pour toute $\phi \in \mathcal{S}$, $\langle J^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$ (on rappelle que $\mathcal{S}^*$ est l'antidual de $\mathcal{S}$) $= \langle J^t a, \overline{\phi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$; en écrivant $\overline{\phi} = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(\overline{\phi})$ on obtient $\langle \mathcal{F}(J^t a), \mathcal{F}^{-1}(\overline{\phi})\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle e^{2i\pi tx\xi}\mathcal{F}a, \mathcal{F}^{-1}(\overline{\phi})\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \mathcal{F}a, \overline{e^{2i\pi tx\xi}\mathcal{F}^{-1}(\overline{\phi})}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \cdots = \langle a, J^{-t}\phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$ vrai pour $a \in \mathcal{S}'$. (On a utilisé le fait que $\overline{J}^{-t}\phi = \overline{\mathcal{F}^{-1}(e^{-2i\pi tx\xi}\widehat{\phi})} = \mathcal{F}(\overline{e^{-2i\pi tx\xi}\widehat{\phi}}) = \cdots = \mathcal{F}(\overline{\phi})$). On a $\forall\phi \in \mathcal{S}$, $\langle J^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle a, J^{-t}\phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \iint a(x,\xi)\overline{J}^{-t}\phi(x,\xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \lim \iint a_k(x,\xi)\overline{J}^{-t}\phi(x,\xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \lim\langle a_k, J^{-t}\phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \lim\langle J^t a_k, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$. Or, comme $a_k \in \mathcal{S}$ on a $J^t a_k = \widetilde{J}^t a_k$ donc $\langle J^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \lim\langle \widetilde{J}^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \lim \widetilde{J}^t a_k(x,\xi)\overline{\phi}(x,\xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$. En utilisant la formule précédente $\widetilde{J}^t a_l(x,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} c_{\alpha,\beta}(t) \iint e^{2i\pi\epsilon y\eta} \underbrace{T_{\alpha,\beta}(\eta)}_{\lesssim p_k(\eta)^{-1}} (\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_\xi^\beta a)(x + \sqrt{|t|}y, \xi + \sqrt{|t|}\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$, comme $a_k \xrightarrow{\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty} a$ et (a_k) bornée dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour avoir $\widetilde{J}^t a_k(x,\xi) \to \widetilde{J}^t a(x,\xi)$ $\forall(x,\xi)$. Ainsi, comme $\widetilde{J}^t : \mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty \to \mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$ est continu on en déduit que $\langle J^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle \widetilde{J}^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$ et c'est que l'on voulait :-D

□

Remarque 1.20. Par abus de notation, on note pour $a \in \mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$, $J^t a(x,\xi) = \frac{1}{|t|^n} \iint e^{-\frac{2i\pi y\eta}{t}} a(x+y, \xi+\eta)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\eta$ même si l'intégrale n'est pas absolument convergente. Elle est définie en tant qu'*intégrale oscillante* après un nombre suffisamment grand d'intégrations par parties formelles, grâce au terme oscillant $e^{-\frac{2i\pi y\eta}{t}}$.

Plus généralement, si (avec $\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$ le crochet japonais) l'on a $\forall\alpha,\beta, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \lesssim \langle(x,\xi)\rangle^m a$ (pour $m \in \mathbb{R}$) alors l'intégrale $I := \iint e^{-2i\pi y\eta} a(y,\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ est bien définie en tant qu'intégrale oscillante, par la formule $I = \iint e^{-2i\pi y\eta} p_k(y)^{-1} p_k(\mathrm{D}_\eta)[p_k(\eta)^{-1} p_k(\mathrm{D}_y) a]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ qui est une intégrale convergente si $k > n + |m|$.

Définition 1.21. Soit $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La *distribution complexe conjuguée* à a, notée $\overline{a} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, est donnée par :

$$\forall\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \overline{a}, \phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} := \overline{\langle a, \overline{\phi}\rangle}_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

Remarque 1.22. Si $a = f \in \mathrm{L}^1$ on vérifie bien la cohérence de cette définition.

Exercice 1.23. On vérifie que $\forall t \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \overline{J^t a} = J^{-t}\overline{a}$.

2 Classe de Hörnander

On considère la classe de symboles (dite *classe de Hörnander*) $\mathcal{S}^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2n})$ définie par :

$$\mathcal{S}^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2n}) := \left\{a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists c_{\alpha,\beta} > 0, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, |(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a)(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}\right\}$$

où $m \in \mathbb{R}, \langle \xi \rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$.

Exemple 2.1. $P(x, \mathrm{D}_x) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) \mathrm{D}_x^\alpha \xrightarrow{\text{symbole}} p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$. Si $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ alors $p \in \mathcal{S}^k_{1,0}$.

L'espace $\mathcal{S}^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2n})$ est muni des semi-normes suivantes :

$$\gamma_{k,m}(a) := \sum_{\substack{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n} \\ |\alpha|+|\beta|\leq k}} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \langle \xi \rangle^{-m+|\beta|} \right|$$

est devient ainsi un espace de Fréchet.

Remarque 2.2. Si $m_1 \leq m_2$ alors $\mathcal{S}^{m_1}_{1,0} \subseteq \mathcal{S}^{m_2}_{1,0}$.

Lemme 2.3. *Soient $m, t \in \mathbb{R}$. L'opérateur J^t envoie $\mathcal{S}^m_{1,0}(\mathbb{R}^{2n})$ dans lui-même de façon continue. De plus, $\forall N \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$,*

$$J^t a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{t^{|\alpha|}}{\alpha!} (\mathrm{D}_\xi^\alpha \partial_x^\alpha a)(x,\xi) + r_N(t,x,\xi) \in \mathcal{S}^m_{1,0}$$

où le reste $r_N \in \mathcal{S}^{m-N}_{1,0}$ est défini par :

$$r_N(t,x,\xi) := t^N \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{(N-1)!} J^{\theta t} \left[(\mathrm{D}_\xi \partial_x)^N a\right](x,\xi)\,\mathrm{d}\theta$$

Remarque 2.4. Attention, $\mathrm{D} = \frac{1}{2i\pi}\partial$ et $\alpha! := \prod \alpha_j!$.

Démonstration. On vérifie en utilisant une formule de Taylor qu'en tant qu'opérateur sur $\mathcal{S}'$:

$$J^t = e^{2i\pi t \mathrm{D}_x \cdot \mathrm{D}_\xi} = e^{t\mathrm{D}_\xi \partial_x} = \sum_{0\leq k<N} \frac{t^k}{k!}(D_\xi \partial_x)^k + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{(N-1)!} e^{2i\pi\theta t \mathrm{D}_x \mathrm{D}_\xi} (t\mathrm{D}_\xi \partial_x)^N\,\mathrm{d}\theta$$

(immédiat par dualité, par exemple en utilisant la définition de J^t avec la transformée de Fourier). Il suffit ensuite de remarquer que

$$\frac{t^k}{k!}(\mathrm{D}_\xi \partial_x)^k = \sum_{|\alpha|=k} t^{|\alpha|} \frac{\mathrm{D}_\xi^\alpha \partial_x^\alpha}{\alpha!}$$

(vrai car $(\mathrm{D}_\xi \partial_x)^k = (\sum \mathrm{D}_{\xi_j} \partial_{x_j})^k = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k} c_\alpha \prod \mathrm{D}_{\xi_j} \partial_{x_j}$, il reste à compter). Ainsi,

$$J^t a = \sum_{|\alpha|<N} \frac{t^{|\alpha|}}{\alpha!} \mathrm{D}_\xi^\alpha \partial_x^\alpha a + t^N \int_0^1 \frac{(1-\theta)}{(N-1)!} \underbrace{e^{2i\pi t\theta \mathrm{D}_x \mathrm{D}_\xi}}_{J^{t\theta}} \underbrace{(D_\xi \partial_x)^N a}_{\mathcal{S}^{m-N}_{1,0}}\,\mathrm{d}\theta$$

Grâce à nos estimations des constantes en fonction de t, on va pouvoir transférer les propriétés sous l'intégrale. On va montrer que $\forall m \in \mathbb{R}$, J^t envoie continument $\mathcal{S}^m_{1,0}$ dans lui-même ; cela impliquera que $\forall\, 0 \leq \theta \leq 1, J^{\theta t}((\mathrm{D}_\xi \partial_x)^N a) \in \mathcal{S}^{m-N}_{1,0}$ ainsi que le reste, en vérifiant que les constantes dépendent continument de la variable θ.

Si $a \in \mathcal{S}$, $J^t a = \int e^{2i\pi\epsilon y\eta} p_k(y)^{-1} p_k(\mathrm{D}_\eta)[p_k(\eta)^{-1} p_k(\mathrm{D}_y)(a(x+\sqrt{|t|}y, \xi+\sqrt{|t|}\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = \widetilde{J}^t a$ pour k pair $> n+|m|$. Montrons que :

1. l'opérateur $\widetilde{J}^t a$ est bien défini pour $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$;
2. l'opérateur $\widetilde{J}^t$ est continu de $\mathcal{S}^m_{1,0}$ dans lui-même ;
3. $\forall a \in \mathcal{S}^m_{1,0} \subseteq \mathcal{S}', J^t a = \widetilde{J}^t a$;

et on en déduira que J^t est continu de $\mathcal{S}^m_{1,0}$ dans lui-même.

Pour montrer la continuité, on utilise l'*inégalité de Peetre* :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \frac{\langle \xi + \eta \rangle^s}{\langle \xi \rangle^s} \leq 2^{\frac{|s|}{2}} \langle \eta \rangle^{|s|}$$

où $\langle \xi \rangle := sqrt1 + |x|^2$ est le crochet japonais (exo : utiliser l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne). Soit $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$; $\forall \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in \mathbb{N}^n, |\mathrm{D}_x^{\widetilde{\alpha}} \mathrm{D}_\xi^{\widetilde{\beta}} \widetilde{J}^t a(x,\xi)| = |\widetilde{J}^t (\mathrm{D}_x^{\widetilde{\alpha}} \mathrm{D}_\xi^{\widetilde{\beta}} a)(x,\xi)|$

$\leq \underbrace{c(t)}_{\in \mathbb{C}[\sqrt{t}]} \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} p_k(y) - 1 p_k(\eta)^{-1} |\mathrm{D}_x^{\alpha + \widetilde{\alpha}} \mathrm{D}_\xi^{\beta + \widetilde{\beta}} (x + \sqrt{|t|} y, \xi + \sqrt{|t|}\eta)| \,\mathrm{d}y \mathrm{d}\eta$. Cette dernière intégrande est $\lesssim \langle \xi + \sqrt{|t|}\eta \rangle^{m - |\beta| - |\widetilde{\beta}|} \lesssim \langle \xi + \sqrt{|t|}\eta \rangle^{m - |\beta|}$. Or, $\langle \xi + \sqrt{|t|}\eta \rangle^{m-|\beta|} \lesssim \langle \xi \rangle^{m - |\beta|} \langle \sqrt{|t|}\eta \rangle^{|m - |\beta||}$ par l'inégalité de Peetre. Ainsi, $|\mathrm{D}_x^{\widetilde{\alpha}} \mathrm{D}_\xi^{\widetilde{\beta}} \widetilde{J}^t a(x,\xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{m - |\widetilde{\beta}|}$ si $k > n + |m| + |\widetilde{\beta}|$, quitte à faire des intégrations par parties. On a donc bien montré la continuité de $\widetilde{J}^t : \mathcal{S}^m_{1,0} \to \mathcal{S}^m_{1,0}$.

On sait que $\forall a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}), J^t a = \widetilde{J}^t a$; montrons que l'égalité tient pour $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$ (qui est inclus dans $\mathcal{S}'$ donc J^t y est bien défini). Pour ce cela, on procède comme dans la preuve précédente : pour $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$, $\langle \xi \rangle^{-m}$ est dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$. En considérant nos fonctions a_k définies par $a_k(x,\xi) := e^{-\frac{1}{k^2}(|x|^2 + |\xi|^2)} a(x,\xi)$, on a :

– $(\langle \xi \rangle^{-m} a_k)_k$ est bornée dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$;
– $\langle \langle \xi \rangle^{-m} a_k \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}} [k \to \infty] \langle \xi \rangle^{-m} a$ donc $a_k \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} a$.

Comme précédemment, on montre par convergence dominée que $J^t a_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} J^t a$; or, $J^t a = \widetilde{J}^t a_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widetilde{J}^t a$ donc $J^t a = \widetilde{J}^t a$. □

3 Une algèbre d'opérateurs pseudo-différentiels

Théorème 3.1. *Soient $a, b \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n})$. La composition $a(x, \mathrm{D}x) b(x, \mathrm{D}x)$ définie comme un opérateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (et également de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même) est un opérateur pseudo-différentiel qui s'écrit de la façon suivante :*

$$a(x, \mathrm{D}x) b(x, \mathrm{D}x) = (a \# b)(x, \mathrm{D}x)$$

où le symbole $a \# b \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ est donné par :

$$\begin{aligned} (a\#b)(x,\xi) &:= e^{2i\pi \mathrm{D}_y \mathrm{D}_\eta} \left(a(x, \xi + \eta) b(y + x, \xi) \right) |_{y,\eta = 0} && (1) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-2i\pi y \eta} a(x, \xi + \eta) b(y + x, \xi) \,\mathrm{d}y \mathrm{d}\eta && (2) \end{aligned}$$

De plus, l'application $\# : \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}} \times \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}} \to \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ est continue *pour la topologie d'espace de Fréchet.*

Remarque 3.2. On note parfois $\diamond$ au lieu de $\#$.

Remarque 3.3. L'opérateur $e^{2i\pi \mathrm{D}_y \mathrm{D}_\eta} = J^1 : \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}} \to \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ est un isomorphisme.

La formule (1) est bien définie car si $a, b \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$, la fonction

$$(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto c_{x,\xi}(y, \eta) := a(x, \xi + eta) b(y + x, \xi)$$

est dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$. Il s'ensuit que $J c_{x,\xi} \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ (où $J := J^t$) donc on peut considérer sa valeur en $(y, \eta) = (0, 0)$. Si $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la formule (2) est bien définie en tant qu'intégrale absolument convergente ; si $a, b \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$, l'intégrale (2) est définie au sens des intégrales oscillantes.

Démonstration. On suppose tout d'abord que $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On sait que $a(x, \mathrm{D}x) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continue et de même pour $b(x, \mathrm{D}x)$. Par le théorème de noyau de Schwartz, on a $a(x, \mathrm{D}x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_a(x, y)u(y)\,\mathrm{d}y$ avec $k_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On a $a(x, \mathrm{D}x)b(x, \mathrm{D}x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_a(x, y)(b(x, \mathrm{D}x)u)(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} k_a(x, y)(\int_{\mathbb{R}^n} k_b(y, z)u(z)\,\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}y$. On est dans $\mathcal{S}$ donc on peut appliquer Fubini sans problème donc $k_c(x, z) = \int_{\mathbb{R}^n} k_a(x, y)k_b(y, z)\,\mathrm{d}y$ (cf. multiplication de matrices, c'est normal car le noyau joue le rôle de la matrice de l'opérateur).

On a $\forall u \in \mathcal{S}, a(x, \mathrm{D}_x)u =$ (car $a \in \mathcal{S}$ donc l'intégrale est ACV) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}a(x, \xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \iint e^{2i\pi(x-y)\xi}a(x, \xi)u(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} k_a(x, y)u(y)\,\mathrm{d}y$ avec $k_a(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi(x-y)\xi}a(x, \xi)\,\mathrm{d}\xi$.

On a $\forall u, v \in \mathcal{S}, (a(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u, v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$
$= \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} k_c(x, z)u(z)\,\mathrm{d}z)\,\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{3n}} k_a(x, y)k_b(y, z)u(z)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$
$= \int_{\mathbb{R}^{5n}} e^{2i\pi[(x-y)\xi+(y-z)\eta]}a(x, \xi)b(y, \eta)u(z)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi$
$= \int_{\mathbb{R}^n_x} \int_{\mathbb{R}^n_\eta} e^{2i\pi x\eta}[\int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{2i\pi[(x-y)+(y-x)\eta]}a(x, \xi)b(x, \xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y]\hat{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta]\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$
$= \int_{\mathbb{R}^n_x} c(x, \mathrm{D}_x)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$ car $\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\eta}c(x, \eta)\hat{u}(\eta)\,\mathrm{d}\eta = c(x, \mathrm{D}_x)u$ avec
$c(x, \eta) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2i\pi(x-y)(\xi-\eta)}a(x, \xi)b(y, \eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-2i\pi y\xi}a(x, \xi+\eta)b(y+x, \eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$ et c'est bien la formule annoncée.

En effet (en changeant le η en ξ) $e^{2i\pi\mathrm{D}_y\mathrm{D}_\eta}\underbrace{[a(x, \xi+\eta)b(y+x, \xi)]}_{c_{x,\xi}(y,\eta)} =$ (théorème précédent)

$\iint e^{-2i\pi y\eta}c_{x,\xi}(\tilde{x}+y, \tilde{\xi}+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ donc $e^{2i\pi\mathrm{D}_y\mathrm{D}_\eta}[c_{x,\xi}]|_{x,\xi=0} = \iint e^{-2i\pi y\eta}\underbrace{c_{x,\xi}(y, \eta}_{a(x,\xi+\eta)b(y+x,\xi)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = c(x, \xi)$.

On a donc montré que $\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathrm{L}^n), (a(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u, v)_{\mathrm{L}^2} = (c(x, \mathrm{D}_x)u, v)_{\mathrm{L}^2}$ donc $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), a(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u = c(x, \mathrm{D}_x)u$ où $c(x, \xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-2i\pi y\eta}a(x, \eta+\xi)b(y+x, \xi)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$
$= \underbrace{e^{2i\pi\mathrm{D}_x\mathrm{D}_\eta}}_{J}[a(x, \xi+\eta)b(y+x, \xi)]|_{y,\eta=0}$.

Pour la continuité, on sait que $J : \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}} \to \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ est continu. Plus précisément, on a montré que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \|\mathrm{D}^\alpha_x\mathrm{D}^\beta_\xi J^t a\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq c_{\alpha,\beta}\sup_{|\alpha'|,|\beta'|\leq n+2}\|\mathrm{D}^{\alpha+\alpha'}_x\mathrm{D}^{\beta+\beta'}_\xi a\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Ainsi, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \|\mathrm{D}^\alpha_y\mathrm{D}^\beta_\eta Jc_{x,\xi}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq c_{\alpha,\beta}\sup_{|\alpha'|,|\beta'|\leq n+2}\|\mathrm{D}^{\alpha+\alpha'}_y\mathrm{D}^{\beta+\beta'}_\eta c_{x,\xi}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \tilde{c}_{\alpha,\beta}\sup_{|\alpha|\leq n+2}\|\mathrm{D}^{\alpha+\alpha'}_x\|_{\mathrm{L}^\infty}\sup_{|\beta'|\leq n+2}\|\mathrm{D}^{\beta+\beta'}_\xi a\|_{\mathrm{L}^\infty}$. On considère maintenant l'opérateur $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}\times\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}} \to \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ qui à $(a, b) \mapsto e^{2i\pi\mathrm{D}_y\mathrm{D}_\eta}[a(x, \xi+\eta)b(y+x, \xi)]|_{y,\eta=0} = a\#b$; l'inégalité précédente nous fournit précisément la continuité de cet opérateur car l'inégalité est indépendante de (x, ξ).

Montrons que $\forall a, b \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}, \forall u \in \mathcal{S}, a(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u = (a\#b)(x, \mathrm{D}_x)u$ $(*)$. On sait déjà que $(*)$ est vraie si $a, b \in \mathcal{S}$; on va maintenant faire des approximations. Soient $a, b \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$; on définit a_k, b_k comme avant.

$a(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u = \mathcal{S}\text{-}\lim_k a_k(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u$ (par un lemme précédent ; $\mathcal{S}$-lim veut dire que la convergence a lieu dans $\mathcal{S}$) $= \mathcal{S}\text{-}\lim_k(\mathcal{S}\text{-}\lim_l a_k(x, \mathrm{D}_x)b_l(x, \mathrm{D}_x)u)$ pour la même raison et aussi car $a_k : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est continu. Il s'ensuit que $\forall u, v \in \mathcal{S}, (a(x, \mathrm{D}_x)b(x, \mathrm{D}_x)u, v) = \lim_k\lim_l(a_k(x, \mathrm{D}_x)b_l(x, \mathrm{D}_x)u, v)$. Comme $a_k, b_k \in \mathcal{S}$ on a $a_k(x, \mathrm{D}_x)b_l(x, \mathrm{D}_x)u = (a_k\#b_k)(x, \mathrm{D}_x)u$. De plus, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ donc $a_k\#b_l \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$; ainsi, $(a_k(x, \mathrm{D}_x)b_l(x, \mathrm{D}_x)u, v) = \iint(a_k\#b_l)(x, \xi)\Omega_{u,v}(x, \xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$ (cf. définition du tout début du cours). On a en fait $(a_k\#b_l)(x, \xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-2i\pi y\eta}a_k(x, y+\eta)b_l(y+x, \xi)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$

$\overset{\mathrm{IPP}}{=} \sum_{p=0}^{k/2}\binom{k/2}{p}\iint e^{-2i\pi yeta}|\mathrm{D}_y|^{2p}(p_k(y)^{-1}b_l(y+x, \xi))p_k(\eta)^{-1}(p_k(\mathrm{D}_y)a_k)(x, \xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ où $k > n$ est pair. On appliquant le théorème de convergence dominée (on a $b_l \to b$ dans $\mathcal{C}^\infty$ et (b_l) est bornée dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$) on trouve $\forall x, \xi, (a_k\#b_l)(x, \xi) \to (a_k\#b)(x, \xi)$. De plus, comme $\|a_k\#b_l\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq c$ seminorme(a_k) $\underbrace{\text{seminorme}(b_l)}_{\leq c' \text{ car } (b_l) \text{ bornée}}$ donc $\lim_l\iint(a_k\#b_l)(x, \xi)\Omega_{u,v}(x, \xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \iint(a_k\#b)(x, \xi)\Omega_{u,v}(x, \xi)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$.

De même, $\lim_k\iint(a_k\#b)(x, \xi)\Omega_{u,v}(x, \xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \iint(a\#b)(x, \xi)\Omega_{u,v}(x, \xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = ((a\#b)(x, \mathrm{D}_x)u, v)_{\mathrm{L}^2}$. □

Définition 3.4. Soit $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ (le dernier espace étant l'antidual) un opérateur linéaire.

L'opérateur adjoint

$$A^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$$

est défini par :

$$\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle A^* u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \overline{\langle Av, u\rangle}_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$$

Remarque 3.5. Si $A : \mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2$, alors $\langle A^* u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \int (A^* u)\bar{v} = (A^* u, v)_{\mathrm{L}^2} = (u, Av)_{\mathrm{L}^2} = \overline{\int \bar{u} A v} = \overline{\langle Av, u\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}}$.

Théorème 3.6. *Soient $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ et $A = a(x, \mathrm{D}_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur $A^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur pseudo-différentiel*

$$A^* = a^*(x, \mathrm{D}_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$$

où $a^* := J^1 \bar{a} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. De plus, si $a \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ alors $a^* \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$ et $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n}) & \to & \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n}) \\ a & \mapsto & a^* \end{array} \right.$ *est continue.*

Démonstration. $\forall u, v \in \mathcal{S}, \langle A^* u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} \overset{\text{def}}{=} \overline{\langle Av, u\rangle}_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \overline{\langle a(x, \mathrm{D}_x)v, u\rangle}_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} \overset{\phi\mathrm{DO}}{=} \overline{\langle a, \Omega_{v,u}\rangle}_{\mathcal{S},\mathcal{S}} \overset{\text{déf}\bar{a}}{=} \langle \bar{a}, \overset{\Omega_{u,v}}{\ } \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \bar{a}, JJ^{-1}\overline{\Omega_{u,v}}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ (où ϕDO signifie « opérateur pseudo-différentiel »). Or, comme $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a $\Omega_{u,v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\Omega_{v,u}(x,\xi) = \hat{v}(\xi)\overline{u(x)}e^{2i\pi x\xi}$ avec $J^{-1}\overline{\Omega_{v,u}} = \iint e^{2i\pi y\eta}(\overline{\Omega_{v,u}}(x+y, \xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ (l'intégrale est ACV car $\Omega_{v,u} \in \mathcal{S}) = \iint e^{2i\pi y\eta}\overline{\hat{v}(\xi+\eta)}u(x+y)e^{-2i\pi(x+y)(\xi+\eta)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$
$= \iint e^{2i\pi(y-x)(\eta-\xi)}\overline{\hat{v}(\eta)}u(y)e^{-2i\pi y\eta}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = e^{2i\pi x\xi}(\int u(y)e^{-2i\pi y\xi}\,\mathrm{d}y)(\int \overline{\hat{v}(\eta)}e^{-2i\pi x\eta}\,\mathrm{d}\eta) = e^{2i\pi x\xi}\hat{u}(\xi)\overline{v(x)} = \Omega_{u,v}(x,\xi)$.

Or, $\langle A^* u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle \bar{a}, J\Omega_{u,v}\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$. On a vu que $\forall a \in \mathcal{S}', \forall \phi \in \mathcal{S}, \langle J^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle a, J^{-t}\phi\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$. Ceci est équivalent à la propriété $\forall a \in \mathcal{S}', \forall \phi \in \mathcal{S}, \langle J^t a, \phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle a, J^t\phi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ donc $\langle A^* u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle \underbrace{J\bar{a}}_{\in\mathcal{S}'}, \Omega_{u,v}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle (J\bar{a})(x, \mathrm{D}_x)u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}}$ d'où $A^* = (J\bar{a}(x, \mathrm{D}_x)$. □

Remarque 3.7. L'application $\begin{array}{cccl} T: & \mathcal{S}' & \to & \text{applications linéaires } \mathcal{S} \to \mathcal{S}^* \text{ continues} \\ & a & \mapsto & a(x, \mathrm{D}_x) \end{array}$ est injective. En effet, soit $a \in \mathcal{S}'$ tel que $\forall u \in \mathcal{S}, a(x, \mathrm{D}_x u) = 0$ dans $\mathcal{S}^*$. Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ et soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\hat{u}(\xi) := e^{-\pi|\xi-\xi_0|^2}$ et $v(x) := e^{-\pi|x-x_0|^2}$. On a $0 = \langle a(x, \mathrm{D}_x)u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle a, \Omega_{u,v}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$. Or, $\Omega_{u,v}(x,\xi) = e^{-\pi(|x-x_0|^2+|\xi-\xi_0|^2}e^{2i\pi x\xi}$ donc on obtient $0 = \langle e^{2i\pi x\xi}a, e^{-\pi(|x-x_0|^2+|\xi-\xi_0|^2}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$
$= [(ae^{2i\pi x\xi}) \star (e^{-\pi(|x|^2+|\xi|^2)}](x_0, \xi_0)$ (produit de convolution $\mathcal{S}' \star \mathcal{S}$). Comme $\mathcal{S}' \star \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \cap \mathcal{C}^\infty$, on a $(ae^{2i\pi x\xi}) \star (e^{-\pi(|x|^2+|\xi|^2)} = 0$ donc en prenant la transformée de Fourier on obtient $\widehat{e^{-\pi(|x|^2+|\xi|^2)}}\widehat{ae^{2i\pi x\xi}} = 0$ donc comme le premier membre est une gaussienne on obtient $\widehat{ae^{2i\pi x\xi}} = 0$ donc $ae^{2i\pi x\xi} = 0$ donc $a = 0$.

En particulier, le symbole d'un ψDO est défini de manière unique.

4 Formules de quantification

On peut quantifier de différentes manières une fonction (on dit aussi un hamiltonien) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. On considère en particulier la quantification à paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{Op}_t a)u(x) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2i\pi(x-y)\xi} a((1-t)x + ty, \xi)u(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

Si $t = 0$, on reconnait la *quantification standard* : $(\mathrm{Op}_0 a)u(x) = \iint e^{2i\pi(x-y)\xi}a(x,\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ donc $a(x, \mathrm{D}_x) = \mathrm{Op}_0 a$.

Exemple 4.1. $\mathrm{Op}_0(a(x)\xi_j) = a(x)\mathrm{D}_{x_j}$ où $\mathrm{D}_{x_j} = \frac{1}{2i\pi}\partial_{x_j}$, et $\mathrm{Op}_0(\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x)\xi^\alpha) = \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha_x$.

Si $t = 1$, on parle de *quantification adjointe.*

Exemple 4.2. $\mathrm{Op}_1(a(x)\xi_j) = \mathrm{D}_{x_j} a(x)$ (on multiplie par a puis on dérive, donc) $= a(x)D_{x_j} + \frac{1}{2i\pi}\partial_{x_j} a$. Ainsi, $\mathrm{Op}_1(a(x)\xi_j)u = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2i\pi(x-y)\xi}\xi_j \underbrace{a(y)u(y)}_{v(y)} \,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} \underbrace{\xi_j \hat{v}(\xi)}_{\widehat{\mathrm{D}_{x_j} v}} = \mathrm{D}_{x_j} v = \mathrm{D}_{x_j}(au)$.

La quantification symétrique, obtenue pour $t = \frac{1}{2}$, est appelée *quantification de Weyl*[1]. Elle est très utilisée en mécanique quantique car les symboles (hamiltoniens) à valeurs réelles sont quantifiés en des opérateurs autoadjoint. On dit que $a \in \mathcal{S}'$ est à valeurs réelles si $a = \bar{a}$ (distribution complexe conjuguée définie précédemment). On a :

$$a^W(x, \mathrm{D}_x)u(x) := \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)u(x) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2i\pi(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) \,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

Exemple 4.3. $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(x_k\xi_j) =$ (car particulier ici) $\frac{1}{2}\mathrm{Op}_0(x_k\xi_j) + \frac{1}{2}\mathrm{Op}_1(x_k\xi_j) = \frac{1}{2}(x_k\mathrm{D}_{x_j} + \mathrm{D}_{x_j}x_k)$.

La quantification de Weyl possède des propriétés géométriques remarquables, notamment la propriété d'*invariance symétrique* (cf. plus tard) : si $\chi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est un isomorphisme linéaire préservant la forme symplectique alors il y a un lien entre $(a \circ \chi)^W(x, \mathrm{D}_x) = a^W(x, \mathrm{D}_x)$ (ils sont conjugués).

On parle aussi de *quantification de Feynman* :

$$\mathrm{Op}^F(a)u(x) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2i\pi(x-y)\xi} \frac{a(x,\xi) + a(y,\xi)}{2} u(y) \,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Op}_0(a) + \mathrm{Op}_1(a)\right)$$

Propriété 4.4.
- *Les hamiltoniens à valeurs réelles sont quantifiés en des opérateurs autoadjoints.*
- *Pas d'invariant symplectique.*

Soit $a \in \mathcal{S}^{2n}, u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), t \in \mathbb{R}$. L'intégrale suivante est absolument convergente :

$$\mathrm{Op}_t(a)u(x) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{2i\pi(x-y)\xi} a((1-t)x + ty, \xi)u(y) \,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \in \mathcal{C}^\infty$$

En effet, $\langle \mathrm{Op}_t(a)u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \iiint e^{2i\pi(x-y)\xi} a((1-t)x+ty, \xi)u(y)\overline{v(x)} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi = \iiint e^{-2i\pi s\xi} a(z,\xi)u(z+(1-t)s)\overline{v(z-ts)} \,\mathrm{d}z\mathrm{d}s\mathrm{d}\xi = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} a(x,\xi)\Omega_{u,v}(t)(x,\xi) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = \langle a, \Omega_{u,v}(t)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ où $\Omega_{u,v}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\xi} u(x+(1-t)z)\overline{v(x-tz)} \,\mathrm{d}z$.

Remarque 4.5. $\Omega_{u,v}(0) = \overline{v(x)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\xi} u(x+z) \,\mathrm{d}z = \overline{v(x)} e^{2i\pi x\xi}\hat{u}(\xi) = \Omega_{u,v}$ (celui défini au début du cours). Par la même démonstration que pour $\Omega_{u,v}$, on montre que $\Omega_{u,v}(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (c'est une transformée de Fourier partielle).

Définition 4.6. Soit $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ et $t \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur :

$$\mathrm{Op}_t(a) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^n)$$

par $\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \langle \mathrm{Op}_t(a)u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle a, \Omega_{u,v}(t)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$.

Proposition 4.7. *Soit $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ et $t \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\mathrm{Op}_t(a) = \mathrm{Op}_0(J^t a) = (J^t a)(x, \mathrm{D}_x)$$

1. Hermann Weyl.

Démonstration. Soient $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), t \in \mathbb{R}^*$ (si $t = 0$ le résultat est évident car $J^0 = \mathrm{id}$). $J^t(\underbrace{\Omega_{u,v}(0)}_{\mathcal{S}}) \overset{\text{ACV}}{=}$ $\frac{1}{|t|^n} \iint e^{-\frac{2i\pi y\eta}{t}} (\Omega_{u,v}(0))(x+y, \xi+\eta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = \frac{1}{|t|^n} \iint e^{-\frac{2i\pi}{t}(x-y)(\xi-\eta)} \underbrace{[\Omega_{u,v}(0)](y,\eta)}_{\overline{v(y)}e^{2i\pi y\eta}\hat{u}(\eta)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = \iint e^{-2i\pi z(\xi-\eta)}\bar{v}(x-tz)\hat{u}(\eta)e^{2i\pi(x-tz)}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\eta = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi z\xi}\bar{v}(x-tz)\,\underbrace{(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta)e^{-2i\pi\eta(tz-x-z)}\,\mathrm{d}\eta)}_{u((1-t)z-x)}\,\mathrm{d}z = [\Omega_{u,v}(t)](x,\xi)$.

Finalement, $\langle \mathrm{Op}_t(a)u, v\rangle_{\mathcal{S}^*,\mathcal{S}} = \langle a, \underbrace{\Omega_{u,v}(t)}_{J^t(\Omega_{u,v}(0))} \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle a, J^t(\Omega_{u,v}(0))\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle J^t a, \Omega_{u,v}(0)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle J^t a, \Omega_{u,v}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = (J^t a)(x, \mathrm{D}_x)$. □

Remarque 4.8. $(\mathrm{Op}\frac{1}{2}(a))^* =$(par la proposition précédente) $(\mathrm{Op}_0(J^{\frac{1}{2}}a))^* = \mathrm{Op}_0(J(\overline{J^{\frac{1}{2}}a})) = \mathrm{Op}_0(JJ^{-\frac{1}{2}}\bar{a}) = \mathrm{Op}_0(J^{\frac{1}{2}}\bar{a}) = \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(\bar{a})$. Ainsi, si $a = \bar{a}$ (où $\bar{a}$ est la distribution complexe conjuguée) alors l'opérateur $\mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(a)$ est autoadjoint. La réciproque est également vraie (il y a une sorte d'injectivité pour Op_0).

Remarque 4.9. On a $(\mathrm{Op}_0(a))^* =$ (par un théorème précédent) $\mathrm{Op}_0(J\bar{a}) =$ (proposition précédente) $\mathrm{Op}_1(\bar{a})$ et donc $\mathrm{Op}_1(a)^* = \mathrm{Op}_0(\bar{a})$. Ainsi, $(\mathrm{Op}^F a)^*) = \frac{1}{2}(\mathrm{Op}_0(a) + \mathrm{Op}_1(a))^* = \frac{1}{2}(\mathrm{Op}_1(\bar{a}) + \mathrm{Op}_0(\bar{a})) = \mathrm{Op}^F\bar{a}$ donc si $a = \bar{a}$ alors $\mathrm{Op}^F(a)$ est autoadjoint.

5 Retour sur la classe de Hörnander

Rappelons que $\mathcal{S}^m_{1,0}(\mathbb{R}^n) = \{a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists c_{\alpha,\beta} > 0, \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, |\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi a(x,\xi) \leq c_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m-|\beta|}\}$.

Exemple 5.1. $\langle\xi\rangle^m \in \mathcal{S}^m_{1,0}$.

Exemple 5.2. Les opérateurs différentiels $P = a(x, \mathrm{D}_x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha_x$ où $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty_\mathrm{b}(\mathbb{R}^n)$ sont dans $\mathcal{S}^m_{1,0}$; comme $\mathcal{S}^m_{1,0} \subseteq \mathcal{S}'$, l'opérateur $a(x, \mathrm{D}_x)$ est bien défini comme application $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$.

Théorème 5.3. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$. Alors $a(x, \mathrm{D}_x)$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ de manière continue, et on a la formule intégrale (absolument convergente) :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), a(x, \mathrm{D}_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Remarque 5.4. La formule n'est pas définie si $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. On vérifie que $a(x, \mathrm{D}_x) = \mathrm{Op}_0(\underbrace{a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m}}_{\substack{\in\mathcal{C}^\infty_\mathrm{b} \text{ donc} \\ \text{opérateur continu } \mathcal{S}\to\mathcal{S}}})\underbrace{\langle \mathrm{D}_x\rangle^m}_{\substack{\text{opérateur} \\ \text{continu } \mathcal{S}\to\mathcal{S}}}$; on a simplement écrit que $a(x, \mathrm{D}_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int e^{2i\pi x\xi}a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m}\underbrace{\langle\xi\rangle^m\hat{u}(\xi)}_{\widehat{\langle \mathrm{D}_x\rangle^m u}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \mathrm{Op}_0(a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m})\langle \mathrm{D}_x\rangle^m u$ où $f(\mathrm{D}_x)(u) := \mathcal{F}^{-1}(f(\xi)\hat{u})$ (où f est une fonction). □

Théorème 5.5. *Soit $a \in \mathcal{S}^0_{1,0}$ (attention, pas $\mathcal{S}^m_{1,0}$!) ; il existe $c > 0$ tel que :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|a(x, \mathrm{D}_x)u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

et l'opérateur $a(x, \mathrm{D}_x)$ se prolonge de manière unique en un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. $\mathcal{S}^0_{1,0} \subseteq \mathcal{C}^\infty_\mathrm{b}$ + théorème précédent. □

Théorème 5.6. *Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{R}, a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}_{1,0}, a_2 \in \mathcal{S}^{m_2}_{1,0}$. L'opérateur $a_1(x, \mathrm{D}_x)a_2(x, \mathrm{D}_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continu et est donné par :*

$$a_1(x, \mathrm{D}_x)a_2(x, \mathrm{D}_x) = (a_1\#a_2)(x, \mathrm{D}_x)$$

où $a_1\#a_2 \in \mathcal{S}^{m_1+m_2}_{1,0}$ et $(a_1\#a_2)(x, \xi) = e^{2i\pi \mathrm{D}_y \mathrm{D}_\eta}(a_1(x, \xi + \eta)a_2(y + x, \xi))$.

Démonstration. Similaire au cas $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}$. □

Remarque 5.7. La fonction $(y, \eta) \mapsto c_{x,\xi}(y, \eta) = a_1(x, \xi + \eta)a_2(y + x, \xi)$ appartient à $\mathcal{S}^{m_1}_{1,0}$ donc $Jc_{x,\xi}$ aussi ; on peut donc bien prendre sa valeur en $y, \eta = 0$. C'est aussi égal à $J\tilde{c}_{x,\xi}|_{y=x,\eta=\xi}$ où $\tilde{c}_{x,\xi}(y, \eta) := a_1(x, \eta)a_2(y, \xi)$ (à vérifier en tant qu'intégrale oscillante).

Théorème 5.8. *Soient $m, s \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$. Il existe $c > 0$ telle que :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|a(x, \mathrm{D}_x)u\|_{\mathrm{H}^s} \leq c\|u\|_{\mathrm{H}^{s+n}}$$

L'opérateur $a(x, \mathrm{D}_x)$ se prolonge de manière unique en un opérateur borné de $\mathrm{H}^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Rappelons que $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle\xi\rangle^s\hat{u} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\}$ et $\|u\|_{\mathrm{H}^s} = \|\langle\xi\rangle^s\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2}$ (remarquons que s n'est pas forcément un entier naturel). On considère $b(x, \mathrm{D}_x) := \langle \mathrm{D}_x\rangle^s a(x, \mathrm{D}_x)\langle \mathrm{D}_x\rangle^{-m-s}$. On a $\langle \mathrm{D}_x\rangle^r = \mathrm{Op}_0(\underbrace{\langle\xi\rangle^r}_{\in \mathcal{S}^r_{1,0}})$. On a donc (par composition) $b = \langle\xi\rangle^s\#a\#\langle\xi\rangle^{-m-s} \in \mathcal{S}^s_{1,0}\#\mathcal{S}^m_{1,0}\#\mathcal{S}^{-m-m}_{1,0} \subseteq \mathcal{S}^m_{1,0}$. Ainsi, b se prolonge de manière unique en un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $a(x, \mathrm{D}_x) = \langle \mathrm{D}_x\rangle^{-s}b(x, \mathrm{D}_x)\langle \mathrm{D}_x\rangle^{m+s}$. On a :

$$\mathrm{H}^{s+m} \xrightarrow[\text{isométrie}]{\langle \mathrm{D}_x\rangle^{m+s}} \mathrm{L}^2 = \mathrm{H}^0 \xrightarrow[\text{continu}]{b(x,\mathrm{D}_x)} \mathrm{L}^2 \xrightarrow[\text{isométrie}]{\langle \mathrm{D}_x\rangle^{-s}} \mathrm{H}^s$$

car $\|\langle \mathrm{D}_x\rangle^{m+s}u\|_{\mathrm{L}^2} = \|\langle\xi\rangle^{m+s}\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2} = \|u\|_{\mathrm{H}^{s+m}}$ et car $\|u\|_{\mathrm{H}^s} = \|\langle\xi\rangle^s\hat{u}\|_{\mathrm{L}^2} = \|\langle \mathrm{D}_x\rangle^s u\|_{\mathrm{L}^2}$. □

Théorème 5.9. *Soient $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}_{1,0}, a_2 \in \mathcal{S}^{m_2}_{1,0}$ où $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Le symbole $a_1\#a_2$ de l'opérateur $a_1(x, \mathrm{D}_x)a_2(x, \mathrm{D}_x) = (a_1\#a_2)(x, \mathrm{D}_x)$ appartient à $\mathcal{S}^{m_1+m_2}_{1,0}$ et vérifie le développement asymptotique :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, a_1\#a_2 = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|<N}} \frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha_\xi a_1 \partial^\alpha_x a_2 + r_N(a_1, a_2)b(x, \mathrm{D}_x)$$

où $r_N(a_1, a_2) \in \mathcal{S}^{m_1+m_2-N}_{1,0}$.

Remarque 5.10. $\mathrm{D}^\alpha_\xi a_1 \in \mathcal{S}^{m_1-|\alpha|}_{1,0}$ et $\partial^\alpha_x a_2 \in \mathcal{S}^{m_2}_{1,0}$ donc leur produit est dans $\mathcal{S}^{m_1+m_2-|\alpha|}_{1,0}$.

Démonstration. On a vu que $(a_1\#a_2)(x, \xi) = J\tilde{c}_{x,\xi}|_{y=x,\eta=\xi}$ où $\tilde{c}_{x,\xi}(y, \eta) = a_1(x, \eta)a_2(y, \xi)$. On a vu dans un lemme précédent que $J\tilde{c}_{x,\xi}(y, \eta) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}(\mathrm{D}^\alpha_\eta\partial^\alpha_y\tilde{c}_{x,\alpha})(y, \eta) + r_N(y, \eta)$ où $r_N(y, \eta) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{(N-1)!}(J^\theta(\mathrm{D}_\eta\partial_y)^N\tilde{c}_{x,\eta})(y, \eta)\,\mathrm{d}\theta$. Ainsi, $(a_1\#a_2)(x, \xi) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{\underbrace{(\mathrm{D}^\alpha_\eta\partial^\alpha_y[a_1(x, \eta)a_2(y, \eta)])}_{\mathrm{D}^\alpha_\eta a_1(x,\eta)\partial^\alpha_y a_2(y,\xi)}|_{y=x,\eta=\xi}}_{\mathrm{D}^\alpha_\xi a_1(x,\xi)\partial^\alpha_x a_2(x,\xi)} + \tilde{r}_N$

où $\tilde{r}_N(a_1, a_2)(x, \xi) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{(N-1)!}[J^\theta((\mathrm{D}_\eta\partial_y)^N(a_1(x, \eta)a_2(y, \xi))]|_{y=x,\eta=\xi}\,\mathrm{d}\theta$. La fonction $(y, \eta) \mapsto b_{x,\xi}(y, \eta) = \langle\xi\rangle^{-m_2}(\mathrm{D}_\eta\partial_y)^N(a_1(x, y)a_2(y, \xi))$ est dans $\mathcal{S}^{m_1-N}_{1,0}$ uniformément par rapport aux paramètres $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. En effet, $|\partial^\alpha_y\partial^\beta_\eta b_{x,\xi}(y, \eta)| = |\langle\xi\rangle^{-m_2}\partial^\alpha_y\partial^\beta_\eta(\mathrm{D}_\eta\partial_y)^N(a_1(x\eta)a_2(y, \xi) \leq C\langle\eta\rangle^{m_1-|\beta|-N}$ avec C indépendante de x, η, car $|\partial^\gamma_y a_2(y, \xi)| \leq c_\gamma\langle\xi\rangle^{m_2}$ $\forall y, \xi$ et $|\partial^\gamma_\eta a_1(x, \eta)| \leq c_\gamma\langle\eta\rangle^{m_1-|\gamma|}$ $\forall x, \eta$.

Définissons $\rho_{x,\xi}(y,\eta) := \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{(N-1)!}(J^\theta b_{x,\xi})(y,\eta)\,\mathrm{d}\theta$ avec $J^\theta b_{x,\xi} \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_1-N}$ car $J^\theta : \mathcal{S}_{1,0}^r \to \mathcal{S}_{1,0}^r$ est continue. D'après l'uniformité des constantes par rapport au paramètre θ, on en déduit que $\rho_{x,\xi} \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_1-N}$ uniformément par rapport à (x,ξ). En particulier, $\sup_{y,\eta,x\xi\in\mathbb{R}^n} |\rho_{x,\eta}(y,\eta)\langle\eta\rangle^{-m_1+N}| = c_0 < +\infty$. On a $r_N(a_1,a_2)(x,\xi) = \langle\xi\rangle^{m_2}\rho_{x,\xi}(x,\xi)$ donc $r_N(a_1,a_2)(x,\xi)| \leq c_0\langle\xi\rangle^{m_1+m_2-N}$.

On veut montrer que $r_N(a_1,a_2) \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_1+m_2-N}$, et on montré que $\forall x,\xi, |r_N(a_1,a_2)| \leq c_0\langle\xi\rangle^{m_1+m_2-N}$. On a $\partial_{x_j} r_N(a_1,a_2) = \partial_{x_j}\left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{N-1}}{(N-1)!} J^\theta((\mathrm{D}_\eta\partial_y)^N(a_1(x,\xi+\eta)a_2(y+x,\xi)\right)|_{y,\eta=0}\,\mathrm{d}\theta = r_N(\partial_{x_j}a_1,a_2)+ r_N(a_1,\partial_{x_j}a_2)$ avec à chaque fois $r_N(\mathcal{S}_{1,0}^{m1},\mathcal{S}_{1,0}^{m_2})$, d'où $|\partial_{x_j} r_N(a_1,a_2)(x,\xi)| \leq \tilde{c}_0\langle\xi\rangle^{m_1+m_2-N}$. De plus, $\partial_{\xi_j} r_N(a_1,a_2) = r_N(\underbrace{\partial_{\xi_j}a_1}_{\mathcal{S}_{1,0}^{m_1-1}},\underbrace{a_2}_{\mathcal{S}_{1,0}^{m_2}}) + r_N(\underbrace{a_1}_{\mathcal{S}_{1,0}^{m_1}},\underbrace{\partial_{\xi_j}a_2}_{\mathcal{S}_{1,0}^{m_2-1}})$ d'où la valeur absolue $\lesssim \langle\xi\rangle^{m_1+m_2-1-N}$ et finalement $r_N(a_1,a_2) \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_1+m_2-N}$. □

Théorème 5.11. *Soit $a \in \mathcal{S}_{1,0}^m$ avec $m \in \mathbb{R}$. L'application*

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{1,0}^m & \to & \mathcal{S}_{1,0}^m \\ a & \mapsto & a^* = J\bar{a} \end{array}\right.$$

(où a^* désigne le symbole de l'opérateur adjoint) est continue. De plus,

$$\forall N \in \mathbb{N}, a^* = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}_\xi^\alpha\partial_x^\alpha\bar{a} + r_N(a)$$

Démonstration. Encore une conséquence de la formule de Taylor pour J. □

6 Faisons de l'algèbre

6.1 Développement asymptotique et application

Corollaire 6.1. *Soient $a_1 \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_1}, a_2 \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_2}$ où $m_1,m_2 \in \mathbb{R}$. Alors :*

(i) $a_1\#a_2 \equiv a_1a_2 \mod \mathcal{S}_{1,0}^{m_1+m_2-1}$;

(ii) $a_1\#a_2 - a_2\#a_1$ *(symbole de $[a_1(x,\mathrm{D}_x),a_2(x,\mathrm{D}_x)]$)* $\equiv \frac{1}{2i\pi}\{a_1,a_2\} \mod \mathcal{S}_{1,0}^{m_1+m_2-2}$ *où le* crochet de Poisson *est donné par* $\{a_1,a_2\} := \sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a_1}{\partial\xi_j}\frac{\partial a_2}{\partial x_j} - \frac{\partial a_1}{\partial x_j}\frac{\partial a_2}{\partial\xi_j}\right) \in \mathcal{S}_{1,0}^{m_1+m_2-1}$;

(iii) $a^* \equiv \bar{a} \mod \mathcal{S}_{1,0}^{m-1}$ *si* $a \in \mathcal{S}_{1,0}^m$.

Démonstration. Conséquence directe du développement asymptotique de $a_1\#a_2$. □

Théorème 6.2. *Soit $a \in \mathcal{S}_{1,0}^m$ un symbole elliptique , i.e. $\inf_{x,\xi\in\mathbb{R}^n}\frac{|a(x,\xi)|}{\langle\xi\rangle^m} > 0$. Il existe un symbole $b \in \mathcal{S}_{1,0}-m$ tel que :*

$$a(x,\mathrm{D}_x)b(x,\mathrm{D}_x) = \mathrm{id} + r_1(x,\mathrm{D}_x)$$
$$b(x,\mathrm{D}_x)a(x,\mathrm{D}_x) = \mathrm{id} + r_2(x,\mathrm{D}_x)$$

où $r_1,r_2 \in \mathcal{S}_{1,0}^{-\infty} := \cap_{m\in\mathbb{R}}\mathcal{S}_{1,0}^m$. On dit que $b(x,\mathrm{D}_x)$ est une paramétrixe *de $a(x,\mathrm{D}_x)$.*

Remarque 6.3. On a ainsi $r_1,r_2 \in \mathrm{H}^s$ pour tout s et donc $r_1,r_2 \in \mathcal{C}^\infty$.

Remarque 6.4. Ellipticité de a : $\exists c > 1, \forall(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \frac{1}{c}\langle\xi\rangle^m \leq |a(x,\xi)| \leq c\langle\xi\rangle^m$ (la première partie traduit l'ellipticité, la deuxième le $\mathcal{S}_{1,0}^m$).

Démonstration. Par la remarque précédente, $\frac{1}{a}$ est bien défini ; montrons que $\frac{1}{a} \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$. Par la formule de Leibniz :

$$\forall |\alpha| + |\beta| \geq 1, 0 = \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (1) = \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(a \frac{1}{a} \right) = \sum_{\substack{(\alpha',\beta')+(\alpha'',\beta'') \\ =(\alpha,\beta)}} c(\alpha',\beta',\alpha'',\beta'')(\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta'} a) \left(\partial_x^{\alpha'} \partial_\xi^{\beta''} \frac{1}{a} \right)$$

Par récurrence, supposons que $\forall |\alpha| + |\beta| \leq k-1, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \frac{1}{a}| \leq c \langle \xi \rangle^{-m-|\beta|}$; on obtient par la formule ci-avant que $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\frac{1}{a}\right) \lesssim \frac{1}{a} \langle \xi \rangle^{-\beta}$ et par ellipticité $\lesssim \langle \xi \rangle^{-m-|\beta|}$, d'où $\frac{1}{a} \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$.

On a $\frac{1}{a} \# a$ $(\in \mathcal{S}^{-m}_{1,0} \# \mathcal{S}^{m}_{1,0}) = \frac{1}{a} a + \ell_1$ avec $\ell_1 \in \mathcal{S}^{-1}_{1,0}$. Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe $b_0, b_1, \ldots, b_N$ où $b_j \in \mathcal{S}^{-m-j}_{1,0}$ tels que $(b_0 + \cdots + b_N) \# a = 1 + \ell_{N+1}$ où $\ell_{N+1} \in \mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}$. Cas $N = 0$: ok avec $b_0 := \frac{1}{a} \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$. Si ok au rang N ; on a $(b_0 + \cdots + b_N) \# a = 1 + \ell_{N+1}$ où $b_j \in \mathcal{S}^{-m-j}_{1,0}, \ell_{N+1} \in \mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}$. On choisit $b_{N+1} := -\frac{\ell_{N+1}}{a} \in \mathcal{S}^{-m-N-1}_{1,0}$. On a $(b_0 + \cdots + b_{N+1}) \# a = (b_0 + \cdots + b_N) \# a + b_{N+1} \# a = 1 + \ell_{N+1} + b_{N+1} \# a$. Or, $b_{N+1} \# a = b_{N+1} a + \ell_{N+2}$ avec $\ell_{N+2} \in \mathcal{S}^{(m+(-m-N-1))-1}_{1,0} = \mathcal{S}^{-N-2}_{1,0}$.

On utilise un lemme de re-sommation à la Borel.

Lemme 6.5. *Soient $m \in \mathbb{R}, (c_j)_{j \geq 0}$ une suite de symbole tels que $c_j \in \mathcal{S}^{m-j}_{1,0}$. Il existe un symbole $c \in \mathcal{S}^{m}_{1,0}$ tel que :*

$$c \sim \sum_{j \geq 0} c_j \text{ \textit{i.e.} } \forall N \geq 0, c - \sum_{j=0}^{N} c_j \in \mathcal{S}^{m-N-1}_{1,0}$$

Par le lemme, il existe un symbole $b \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$ tel que b soit une resommation des b_j, *i.e.* $\forall N \geq 0, b = \sum_{j=0}^{N} b_j + r_N$ où $r_N \in \mathcal{S}^{-m-N-1}_{1,0}$. On a :

$$b \# a = (b_0 + \cdots + b_N + r_N) \# a = (b_0 + \cdots + b_N) \# a + r_N \# a = 1 + \underbrace{\ell_{N+1}}_{\mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}} + \underbrace{r_N \# a}_{\mathcal{S}^{(-m-N-1)+m}_{1,0}}$$

donc on a bien $b \# a \equiv 1 \mod \mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}$ $\forall N \geq 0$ et donc $b \# a \equiv 1 \mod \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$.

De la même manière, on construit $c \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$ tel que $a \# c \equiv 1 \mod \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$. On a donc $b \# a = 1 + r$ et $a \# c = 1 + \tilde{r}$ où $r, \tilde{r} \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$. On a $b = b \# 1$ (où 1 est le symbole de l'identité) $= b \#(a \# c - \tilde{r}) = (b \# a) \# c - b \# \tilde{r} = (1 + r) \# c - b \# \tilde{r} = c + s$ où $s = r \# c - b \# \tilde{r} \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$. On a donc $b \equiv c \mod \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$; ainsi, $a \# b = a \#(c + s) = a \# c + a \# s = 1 + \underbrace{\tilde{r}}_{\mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}} + \underbrace{\underbrace{a}_{\mathcal{S}^{m}_{1,0}} \# \underbrace{s}_{\mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}}}_{\mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}} \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$. ☐

Application 6.6. Soit $a \in \mathcal{S}^{m}_{1,0}$ elliptique. Il existe $b \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}, r \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$ tels que $b(x, \mathrm{D}_x) a(x, \mathrm{D}_x) = \mathrm{id} + r(x, \mathrm{D}_x)$ donc $\|u\|_{\mathrm{H}^{s+m}} = \|b(x, \mathrm{D}_x) a(x, \mathrm{D}_x) u - r(x, \mathrm{D}_x) u\|_{\mathrm{H}^{s+m}} \leq \|b(x, \mathrm{D}_x) a(x, \mathrm{D}_x) u\|_{\mathrm{H}^{s+m}} + \|r(x, \mathrm{D}_x) u\|_{\mathrm{H}^{s+m}}$. Or, $b \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$ donc $b(x, \mathrm{D}_x) : \mathrm{H}^{r-m} \to \mathrm{H}^{r}$ continument. Ainsi, $\|b(x, \mathrm{D}_x) a(x, \mathrm{D}_x) u\|_{\mathrm{H}^{s+m}} \leq \|a(x, \mathrm{D}_x) u\|_{\mathrm{H}^{s}}$; de plus, $r(x, \mathrm{D}_x) \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$ et donc $\forall s \in \mathbb{R}, \forall N \geq 0, \exists c_N > 0, \forall u \in \mathrm{H}^{s+m}, \|u\|_{\mathrm{H}^{s+m}} \leq c_N \|a(x, \mathrm{D}_x) u\|_{\mathrm{H}^{s}} + \|u\|_{\mathrm{H}^{-N}}$. Ainsi, si $P = a(x, \mathrm{D}_x)$ est un opérateur elliptique d'ordre m ($a \in \mathcal{S}^{m}_{1,0}$), si $Pu = f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ pour $u \in \mathrm{L}^2$ alors $\|u\|_{\mathrm{H}^m} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2} + \|u\|_{\mathrm{L}^2}$ donc $u \in \mathrm{H}^m$; par exemple, $P := 1 - \Delta$ et $a(x, \xi) = 1 + |\xi|^2 = \langle \xi \rangle^2 \in \mathcal{S}^{2}_{1,0}$ elliptique.

Démonstration du lemme 6.5. Soit $w \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n})$ telle que : $\begin{cases} w \geq 0 \\ \forall |\xi| \leq 1, w(\xi) = 0 \\ \forall |\xi| \geq 2, w(\xi) = 1 \end{cases}$ (fonction « trou »).

On construit un symbole c sous la forme $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, c(x, \xi) := \sum_{j=0}^{+\infty} c_j(x, \xi) w\left(\frac{\xi}{\lambda_j}\right)$ où $(\lambda_j)_{j \geq 0}$ est une suite de réels tels que $\forall j \geq 0; \lambda_j \geq 1$ à choisir convenablement. On remarque que $\left(w\left(\frac{\cdot}{\lambda_j}\right)\right)_{j\geq 0}$ est une suite bornée de $\mathcal{S}^1_{1,0}$. En effet, pour $|\alpha|+|\beta| \geq 1$:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta w\left(\frac{\xi}{\lambda_j}\right)\right| = |\underbrace{(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta w)}_{\substack{\text{supportée} \\ \text{par } \lambda_j \leq |\xi| \leq 2\lambda_j \\ \to \frac{1}{\lambda_j} \leq \frac{3}{1+|\xi|} \leq 3}} \left(\frac{\xi}{\lambda_j}\right) \frac{1}{\lambda_j} |\beta|| \leq \|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta w\|_{\mathrm{L}^\infty} \frac{3^\beta}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}|$$

et si $|\alpha|+|\beta| = 0$ on a $\left\|w\left(\frac{\xi}{\lambda_j}\right)\right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|w\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty$.

On peut se ramener au cas $m = 0$ quitte à multiplier les symboles par $\langle\xi\rangle^{-m}$. On considère le cas $m = 0$. On va montrer que $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Pour ce faire, on va montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{x,\xi\in\mathbb{R}} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c_j(x,\xi) w\left(\frac{\xi}{\lambda_j}\right)| < +\infty$ (convergence normale) si (λ_j) est bien choisie, cela impliquera donc la convergence uniforme de la série et donc on aura bien $c \in \mathcal{C}^\infty$.

On a $|c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j}| \underset{c_j \in \mathcal{S}^{-1}_{1,0}}{\leq} \gamma(c_j) \langle\xi\rangle^{-j} \|w\|_{\mathrm{L}^\infty} \mathbf{1}_{|\xi|\geq\lambda_j}$ car $\lambda_j \leq |\xi| \leq \langle\xi\rangle \implies \langle\xi\rangle^{-1} \leq \lambda_j^{-1}$, et on trouve que la quantité initiale est $\leq \gamma(c_j)\|w\|_{\mathrm{L}^\infty} \langle\xi\rangle^{-\frac{j}{2}} \underbrace{\langle\xi\rangle^{-\frac{j}{2}}}_{\leq \lambda_j^{-\frac{j}{2}}}$. Si $\forall j \geq 1, \lambda_j \geq \max(2^2(\gamma(c_j)\|w\|_{\mathrm{L}^\infty})^{\frac{2}{j}}, 1)$ alors $\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, |c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j}| \leq \gamma(c_j)\|w\|_{\mathrm{L}^\infty} (2^2)^{-\frac{j}{2}} (\gamma(c_j)\|w\|_{\mathrm{L}^\infty})^{-1} \langle\xi\rangle^{-\frac{j}{2}} \leq \frac{1}{2^j} \langle\xi\rangle^{-\frac{j}{2}} \leq \frac{1}{2^j}$ ce qui montre la convergence normale de la série, mais sans avoir dérivé.

Soit $k \geq 1$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|+|\beta| = k$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \underbrace{c_j(x,\xi)}_{\mathcal{S}^{-j}_{1,0}} \underbrace{w\left(\frac{\xi}{\lambda_j}\right)}_{\substack{\text{borné dans } \mathcal{S}^0_{1,0} \\ \text{unif. } /^t j}} | \leq \gamma_k(c_j) \langle\xi\rangle^{-j-\beta} \mathbf{1}_{|\xi|\geq\lambda_j}$$

où $\gamma_k(c_j)$ dépend des semi-normes de c_j dans $\mathcal{S}^{-j}_{1,0}$ mais pas de λ_j ; l'inégalité se poursuit :

$$\leq \gamma_k(c_j) \langle\xi\rangle^{-\frac{j}{2}-|\beta|} \lambda_j^{-\frac{j}{2}}$$

car $\langle\xi\rangle \geq |\xi| \geq \lambda_j$. Ainsi, si :

$$\forall j \geq k, \lambda_j \geq \max(1, 2^2 \gamma_k(c_j))^{\frac{2}{j}} =: \mu_j^{(k)}$$

on aura $\forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j})| \leq \frac{1}{2^j} \langle\xi\rangle^{-\frac{j}{2}-|\beta|} \leq \frac{1}{2^j}$. On choisit alors :

$$\lambda_j \geq \max_{0\leq k\leq j} \mu_j^{(k)}$$

et avec ce choix on obtient $\sum_{j=k}^{+\infty} \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j})| \leq \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{2^j} < +\infty$.

Ainsi, avec ce choix de (λ_j) on a $c \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, et on a même :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c(x,\xi)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \underbrace{(c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j})}_{\mathcal{S}^{-j}_{1,0}}| + \sum_{j=k}^{+\infty} \underbrace{|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j})|}_{\substack{\leq \frac{1}{2^j} \langle\xi\rangle^{-\frac{j}{2}-|\beta|} \\ \leq \frac{1}{2^j} \langle\xi\rangle^{-|\beta|}}} \lesssim \langle\xi\rangle^{-|\beta|}$$

et donc $c \in \mathcal{S}^0_{1,0}$. Il reste maintenant à vérifie que c possède la propriété annoncée.

$$\forall N \geq 1, c - \sum_{j=0}^{N-1} c_j = \sum_{j=0}^{N-1} c_j(x,\xi) \underbrace{(w(\frac{\xi}{j}) - 1)}_{\substack{\text{supportée}\\ \text{dans}\{|\xi|\leq 2\lambda_j\}}} + \sum_{j=N}^{+\infty} c_j(x,\xi) w(\frac{w}{\lambda_j}$$

Il suffit de montrer que :

$$\forall N \geq 1, \sum_{j=N}^{+\infty} c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j}) \in \mathcal{S}^{-N}_{1,0} \subseteq \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$$

Si $|\alpha| + |\beta| = k$,

$$\sum_{j=N}^{+\infty} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j})| \leq \sum_{j=N}^{\max(2N,k)-1} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \underbrace{(\overbrace{c_j(x,\xi)}^{\mathcal{S}^{-j}_{1,0}} \overbrace{w(\frac{\xi}{\lambda_j})}^{\mathcal{S}^0_{1,0}})}_{\lesssim \langle\xi\rangle^{-j-|\beta|} \leq \langle\xi\rangle^{-N-|\beta|}} | + \sum_{j=\max(2N,k)}^{+\infty} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (c_j(x,\xi) w(\frac{\xi}{\lambda_j})|$$

la deuxième somme étant $\leq \frac{1}{2^j} \langle\xi\rangle^{-|\beta| - \frac{j}{2}}$ et comme $j \geq 2N$ on a $\frac{j}{2} \geq N$ d'où la somme que l'on majore par $\leq \sum_{j=\max(2N,k)}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \langle\xi\rangle^{-|\beta|-N}$. □

Microlocalisation du théorème précédent.

Théorème 6.7. *Soient* $\chi \in \mathcal{S}^0_{1,0}, a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$ *où* $m \in \mathbb{R}$. *On suppose que* $\inf_{(x,\xi) \in \operatorname{supp} \chi} \frac{|a(x,\xi)|}{\langle\xi\rangle^m} > 0$ *(ellipticité sur le support de* χ*). Soit* $\psi \in \mathcal{S}^0_{1,0}$ *tel que* $\operatorname{supp} \psi \subseteq \overbrace{\{\chi = 1\}}^{\circ}$. *Alors il existe* $b \in \mathcal{S}^{-b}_{1,0}$ *tel que :*

$$b(x, \mathrm{D}_x) a(x, \mathrm{D}_x) = \psi(x, \mathrm{D}_x) + r(x, \mathrm{D}_x)$$

où $r \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$.

Remarque 6.8. Le symbole b est un inverse à gauche si l'on prend $\psi = 1$ dans son support ;-)

Remarque 6.9. Il faut penser à χ comme une fonction de troncature.

Démonstration. On considère le symbole $b_0 := \frac{\chi}{a}$. En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve précédente (à savoir la formule de Leibniz), on vérifie que $b_0 \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$. On a $b_0 \# a = \underbrace{(\frac{\chi}{a})}_{\mathcal{S}^{-m}_{1,0}} \# \underbrace{a}_{\mathcal{S}^m_{1,0}} = \underbrace{\chi}_{\mathcal{S}^0_{1,0}} + \underbrace{\ell_1}_{\mathcal{S}^{-1}_{1,0}}$. Par récurrence, il existe $b_0, \ldots, b_N$ avec $b_j \in \mathcal{S}^{-m-j}_{1,0}$ tels que $(b_0 + \cdots + b_N) \# a = \chi + \sum_{j=1}^N (1-\chi)\ell_j + \ell_{N+1}$ où $\ell_j \in \mathcal{S}^{-j}_{1,0}$. Pour $N = 0$ cela vient d'être fait ; supposons la propriété vraie au rang N. On choisit $b_{N+1} := -\frac{\chi \ell_{N+1}}{a} = - \underbrace{\frac{\chi}{a}}_{\mathcal{S}^{-m}_{1,0}} \underbrace{\ell_{N+1}}_{\mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}} \in \mathcal{S}^{-m-N-1}_{1,0}$. Ainsi, $(b_0 + \cdots + b_N + b_{N+1}) \# a =$

$$(b_0 + \cdots + b_N) \# + b_{N+1} \# a = \chi + \textstyle\sum_{j=1}^N (1-\chi)\ell_j + \ell_{N+1} + \underbrace{(\overbrace{-\frac{\chi}{a}\ell_{N+1}}^{\mathcal{S}^{-m-N-1}_{1,0}} \# a)}_{\underbrace{-\frac{\chi \ell_{N+1}}{a} a}_{\mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}} + \underbrace{\ell_{N+2}}_{\mathcal{S}^{-N-2}_{1,0}}}$$

Donc on trouve $\chi+\sum_{j=1}^{N+1}(1-\chi)\ell_j+\ell_{N+1}$. Soit $\psi \in \mathcal{S}^0_{1,0}$ tel que $\operatorname{supp}\psi \subseteq \overbrace{\{\chi=1\}}^{\circ}$. On a $\psi\#(b_0+\cdots+b_N)\#a = \psi\#(\chi+\sum_{j=1}^{N}(1-\chi)\ell_j+\ell_{N+1}) = \psi\#\chi+\sum_{j=1}^{N}\psi\#((1-\chi)\ell_j)+\underbrace{\overbrace{\psi}^{\mathcal{S}^0_{1,0}}\#\overbrace{\ell_{N+1}}^{\mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}}}_{\mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}}$. On remarque que $\forall j=1\dots N, \psi\#((1-\chi)\ell j) \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$ car $\forall k\geq 1, \psi\#(1-\chi)\ell_j = \sum_{|\alpha|<k}\frac{1}{\alpha!}\underbrace{\mathrm{D}^\alpha_\xi\psi\partial^\alpha_x((1-\chi)\ell_j)}_{\text{=0 car les supports sont disjoints}}+r_k$ avec $r_k \in \mathcal{S}^{-j-k}_{1,0}$.

De plus, $\psi\#\chi = \sum_{|\alpha|<k}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha_\xi\psi\partial^\alpha_x\chi+\underbrace{\tilde{r}_k}_{\mathcal{S}^{-k}_{1,0}} = \psi\chi+\tilde{r}_k = \psi+r_k$ (cf. support). Finalement, $\psi\#(b_0+\cdots+b_{N+1})\#a = \psi \mod \mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}$; on veut montrer que c'est dans $\mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$. D'après le lemme de Borel, il existe $\tilde{b} \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$ tel que $b \sim \sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ avec $b_j \in \mathcal{S}^{-m-j}_{1,0}$ *i.e.* $\forall N \geq 0, b-\sum_{j=0}^{N} b_j \in \mathcal{S}^{-m-N-1}_{1,0}$; posons $b := \psi\#\tilde{b} \in \mathcal{S}^0_{1,0}\#\mathcal{S}^{-m}_{1,0} \subseteq \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$. On a donc $b\#a = \psi\#\tilde{b}\#a = \underbrace{\psi}_{\mathcal{S}^0_{1,0}}\underbrace{\tilde{b}-\sum_{j=0}^{N} b_j}_{\mathcal{S}^{-m-N-1}_{1,0}}\#\underbrace{a}_{\mathcal{S}^m_{1,0}}+\underbrace{\psi\#(\sum_{j=0}^{N} b_j)\#a}_{=\psi \mod \mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}}$.

Ainsi, $\forall N\geq 0, b\#a \equiv \psi \mod \mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}$ donc $\forall N \geq 0, r = b\#a-\psi \mod \mathcal{S}^{-N-1}_{1,0}$ donc $r \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$. On a bien montré qu'il existe $b \in \mathcal{S}^{-m}_{1,0}$ et $r \in \mathcal{S}^{-\infty}_{1,0}$ tels que $b(x,\mathrm{D}_x)a(x,\mathrm{D}_x) = \psi(x,\mathrm{D}_x)+r(x,\mathrm{D}_x)$. ☐

6.2 Inégalité de Gårding précisée

C'est un truc de Suédois.

Théorème 6.10 (Hörnander, 1996)**.** *Soit $a \in \mathcal{S}_{1,0}$ où $m \in \mathbb{R}$ est telle que $\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, a(x,\xi) \geq 0$, alors il existe $c>0$ tel que :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Re}(a(x,\mathrm{D}_x)u,u)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}+c\|u\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{m-1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \geq 0$$

Remarque 6.11. Ce résultat a été amélioré par l'inégalité de Fefferman-Phong (remarquons que Fefferman est aussi médaille Fields).

Remarque 6.12. Si $a \geq 0$ alors on n'a pas forcément $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (a(x,\mathrm{D}_x)u,u) \geq 0$.

Remarque 6.13. Le terme en $\|u\|^2$ est un terme d'erreur, *a priori* plus petit que le premier terme. En effet, si $a(x,\xi) := \lambda\xi\rangle^m \in \mathcal{S}^m_{1,0}$ alors $(a(x,\mathrm{D}_x)u,u)_{\mathrm{L}^2} = (\langle\mathrm{D}_x\rangle^m u,u)_{\mathrm{L}^2} = \|\langle\mathrm{D}_x\rangle^{m/2}u\|^2_{\mathrm{L}^2} = \|u\|^2_{\mathrm{H}^{m/2}}$.

Théorème 6.14. *Sous les mêmes hypothèses, $\exists c_0>0$ tel que :*

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (a^w(x,\mathrm{D}_x)u,u)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}+c_0\|u\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{m-1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \geq 0$$

Application 6.15. Si $m=1$ et $P := a^w(x,\mathrm{D}_x)+c_0$, on cherche à résoudre $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+Pu=0 \\ u|_{t=0}=u_0 \end{cases}$ Il existe $(e^{-tP})_{t\geq 0}$ semi-groupe à contraction [2] qui vérifie $\forall t \geq 0, \|e^{-tP}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2)} \leq 1$ et $\forall t,s \geq 0, e^{-(t+s)P}u_0 = e^{-tP}(e^{-sP}u_0)$, la solution étant donnée par $\forall t \geq 0, u(t) = e^{-tP}u_0$.

Démonstration du premier théorème. On peut se limiter au cas $m=1$. En effet, supposons le théorème vrai pour $m=1$. Soit $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$ où $m \in \mathbb{R}$ avec $a \geq 0$. Considérons $b(x,\mathrm{D}_x) := \langle\mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}}a(x,\mathrm{D}_x)\langle\mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}}$.

2. Sans commentaire.

Son symbole est $b = \langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}} \# \underbrace{a}_{\mathcal{S}^m_{1,0}} \# \underbrace{\langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}}}_{\mathcal{S}^{\frac{1-m}{2}}_{1,0}} = \langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}} \# (\underbrace{a\langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}}}_{\mathcal{S}^{\frac{1+m}{2}}_{1,0}} + r_1)$ avec $r_1 \in \mathcal{S}^{\frac{m-1}{2}}_{1,0}$. On a donc $b = \langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}}(a\langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}} + r_1) + r_2$ avec $r_2 \in \mathcal{S}^0_{1,0}$ donc $b = \underbrace{a\langle\xi\rangle^{1-m}}_{\mathcal{S}^1_{1,0}}\overbrace{(\underbrace{\langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}}}_{\mathcal{S}^{\frac{1-m}{2}}_{1,0}} \underbrace{r_1}_{\mathcal{S}^{\frac{m-1}{2}}_{1,0}}}^{\mathcal{S}^0_{1,0}} + r_2)$. Ainsi, $b = p + r$ avec $p \geq 0$, $p \in \mathcal{S}^1_{1,0}$ et $r \in \mathcal{S}^0_{1,0}$. En appliquant le théorème pour $p = 1$, on trouve une constante $c_1 > 0$ telle que $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Re}(p(x, \mathrm{D}_x)u, u) + c_1\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \geq 0$. Or, $\mathrm{Re}(p(x, \mathrm{D}_x)u, u)_{\mathrm{L}^2} = \mathrm{Re}(b(x, \mathrm{D}_x)u, u) - \mathrm{Re}(r(x, \mathrm{D}_x)u, u)_{\mathrm{L}^2}$. Or, $\mathrm{Re}(b(x, \mathrm{D}_x)u, u) = \mathrm{Re}(\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}} a(x, \mathrm{D}_x)\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}} u, u)_{\mathrm{L}^2}$ avec $\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}} = \mathrm{Op}_0(\langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}}) = \mathrm{Op}_{\frac{1}{2}}(\langle\xi\rangle^{\frac{1-m}{2}})$ est autoadjoint :-) Ainsi, $\mathrm{Re}(\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}} a(x, \mathrm{D}_x)\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}} u, u)_{\mathrm{L}^2} = \mathrm{Re}(a(x, \mathrm{D}_x)\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}} u, \langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{1-m}{2}} u)_{\mathrm{L}^2}$. Or, $|\mathrm{Re}(r(x, \mathrm{D}_x)u, u)_{\mathrm{L}^2} \overset{\mathrm{CS}}{\leq} \|r(x, \mathrm{D}_x)\|_{\mathrm{L}^2}\|u\|_{\mathrm{L}^2} \leq c_2\|u\|^2_{\mathrm{L}^2}$ car $r(x, \mathrm{D}_x) \in \mathrm{Op}_0(\mathcal{S}^0_{1,0}) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{L}^2)$, avec $c_2 >_0$.

Finalement, avec $u = \langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{m-1}{2}} v$ avec $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a $\mathrm{Re}(a(x, \mathrm{D}_x)v, v)_{\mathrm{L}^2} + c_1 \underbrace{\|\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{m-1}{2}}\|^2_{\mathrm{L}^2}}_{=\|v\|_{\mathrm{H}^{\frac{m-1}{2}}}} \geq \mathrm{Re}(r(x, \mathrm{D}_x)\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{m-1}{2}} v, \langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{m-1}{2}} v)_{\mathrm{L}^2} \leq -c_2\|\langle \mathrm{D}_x\rangle^{\frac{m-1}{2}} v\|^2_{\mathrm{L}^2}$. Ainsi, $\forall v \in \mathcal{S}, \mathrm{Re}(a(x, \mathrm{D}_x)v, v)_{\mathrm{L}^2} + (c_1 + c_2)\|v\|_{\mathrm{H}^{\frac{m-1}{2}}} \geq 0$.

On suppose donc à partir de maintenant que $m = 1$. On peut aussi remplacer $a(x, \mathrm{D}_x)$ par $a^w(x, \mathrm{D}_x)$: en effet, $R := a^w(x, \mathrm{D}_x) - a(x, \mathrm{D}_x) = \mathrm{Op}_0(J^{\frac{1}{2}}a) - \mathrm{Op}_0(a) = \mathrm{Op}_0(J^{\frac{1}{2}}a - a)$. Or, $J^t a = a + r$ avec $a \in \mathcal{S}^m_{1,0}$ et $r \in \mathcal{S}^{m-1}_{1,0}$. Ici $m = 1$ donc $r \in \mathcal{S}^0_{1,0} \subseteq \mathcal{B}(\mathrm{L}^2)$. Si $\mathrm{Re}(a^w(x, \mathrm{D}_x)u, u)_{\mathrm{L}^2} + C\|u\|^2_{\mathrm{L}^2} \geq 0$ alors $\mathrm{Re}(a(x, \mathrm{D}_x)u, u) = \mathrm{Re}(a^w(x, \mathrm{D}_x)u, u) - \mathrm{Re}(Ru, u) \geq -C\|u\|^2_{\mathrm{L}^2} + |(Ru, u)| \geq -(c + \|R\|_{\mathcal{B}(\mathrm{L}^2)})\|u\|^2$. De plus, a est un symbole à valeurs réelles $a^w(x, \mathrm{D}_x)$ est autoadjoint donc $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathrm{Re}(a^w(x, \mathrm{D}_x), u)_{\mathrm{L}^2} = (a^w(x, \mathrm{D}_x)u, u)_{\mathrm{L}^2}$.

Après toutes ces réduction, il suffit de démontrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), (a^w(x, \mathrm{D}_x)u, u)_{\mathrm{L}^2} + c\|u\|_{\mathrm{L}^2} \geq 0$.

Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(]0, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ telle que $\int_0^{+\infty} \phi \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1$. On a $a(x, \xi) = a(x, \xi)\int_0^{+\infty} \phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{+\infty} a(x, \xi)\phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{\mathrm{CV}\ s = \frac{t}{\langle\xi\rangle}}{=} \int_0^{+\infty} \underbrace{a(x, \xi)\phi(s\langle\xi\rangle)}_{=:a_s(x,\xi)} \frac{\mathrm{d}s}{s}$ (intégrale absolument convergente) ; on a $\forall s > 0, a_s(x, \xi) = a(x, \xi)\phi(s\langle\xi\rangle)$.

$\forall u, v \in \mathcal{S}, (\underbrace{a^w u}_{\mathcal{S}}, v)_{\mathrm{L}^2} = \langle a^w u, v\rangle_{\mathcal{S}^*, \mathcal{S}} = \langle \underbrace{a}_{\mathcal{S}^1_{1,0}}, \underbrace{\Omega_{u,v}(\frac{1}{2}}_{\mathcal{S}}\rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} a(x, \xi)[\Omega_{u,v}(\frac{1}{2})](x, \xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$ (intégrale absolument convergente) $= \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\int_0^{+\infty} a_s(x, \xi)\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)[\Omega_{u,v}(\frac{1}{2})](x, \xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$ et par Fubini on obtient $= \int_0^{+\infty}\left(\iint_{\mathbb{R}^{2n}} a_s(x, \xi)[\Omega_{u,v}(\frac{1}{2})](x, \xi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\right)\frac{\mathrm{d}s}{s} = \int_0^{+\infty}(a^w_s u, v)_{\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{d}s}{s}$.

Soit $\Gamma_s(x, \xi) := 2^n e^{-2\pi(\frac{|x|^2}{s} + s|\xi|^2)}$ si $s > 0$. On a $(a_s * \Gamma_s)(X) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a_s(X - Y)\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y$ où $X := (x, \xi)$ et $Y := (y, \eta)$. Avec la formule de Taylor avec reste intégrale, on a $(a_s * \Gamma_s)(X) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a_s(X)\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y + \int_{\mathbb{R}^{2n}}(-1)\sum_{|\alpha|=1}\frac{\partial^\alpha a_s}{\alpha!}(X)Y^\alpha\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y + \int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_0^1(1-\theta)a''_s(X - \theta Y)Y^2\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y\mathrm{d}\theta$. Remarquons que $\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y = 1$ et $\int_{\mathbb{R}^{2n}} y_j\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \eta_j\Gamma_s(Y)\mathrm{d}Y = 0$ (car les intégrandes sont impaires intégrables). Ainsi, $(a_s * \Gamma_s)(X) = a_s(X) + r_s(X)$ où $r_s(X) := \int_0^1\int_{\mathbb{R}^{2n}}(1-\theta)a''_s(X - \theta Y)Y^2\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y\mathrm{d}\theta$. Montrons que l'opérateur $(a_s * \Gamma_s)^w(x, \mathrm{D}_x)$ est positif, *i.e.* $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), ((a_s * \Gamma_s)^w(x, \mathrm{D}_x)u, u)_{\mathrm{L}^2} \geq 0$. On a $((a_s * \Gamma)^w u, u)_{\mathrm{L}^2} =$ (cf. plus haut) $\iint_{\mathbb{R}^{2n}}(a_s * \Gamma_s)(X)[\Omega_{u,u}(\frac{1}{2})]X\,\mathrm{d}X = \int_{\mathbb{R}^{4n}} a_s(Y)\Gamma_s(X - Y)[\Omega_{u,u}(\frac{1}{2})](X)\,\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$. En remarquant que Γ_s est paire, on obtient $\int_{\mathbb{R}^{2n}} a_s(Y)(\Gamma_s * [\Omega_{u,u}(\frac{1}{2})](Y)\,\mathrm{d}Y$. Comme $a_s(x, \xi) = a(x, \xi)\phi(x, \xi) \geq 0$ (les deux réels du membre de droite sont positifs), il suffit de vérifier que $(\Gamma_s * [\Omega_{u,u}(\frac{1}{2})]) \geq 0$. On a $\Delta := [\Gamma_s * \Omega_{u,u}(\frac{1}{2})](x, \xi) = \iiint 2^n e^{-2\pi(\frac{|y|^2}{s} + s|\eta|^2}e^{-2i\pi(\xi - \eta)z}u(x-$

$y+\frac{z}{2})\bar{u}(x-y-\frac{z}{2})\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$ (car $\Omega_{u,u}(\frac{1}{2}(x,\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2i\pi z\xi}u(x+\frac{z}{2})\bar{u}(x-\frac{z}{2})\,\mathrm{d}z)$. Or, $\int_{\mathbb{R}^n}e^{2i\pi\eta z}2^{\frac{n}{2}}e^{-2\pi s|\eta|^2}\,\mathrm{d}\eta=s^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi}{2s}|z|^2}$. On obtient alors $\Delta=\iint_{\mathbb{R}^{2n}}2^{\frac{n}{2}}e^{-2\pi|y|^2/s}e^{-2i\pi\xi z}s^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi}{2s}|z|^2}u(x-y+\frac{z}{2})\bar{u}(x-y-\frac{z}{2})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}y$. Avec le changement de variable $\begin{cases}y_1=y-\frac{z}{2}\\ y_2=y+\frac{z}{2}\end{cases}$ on obtient $\Delta=\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{2^{n/2}}{s^{n/2}}e^{-\frac{\pi}{2s}\left(|y_1+y_2|^2+|y_1-y_2|^2\right)}e^{2i\pi\xi(y_1-y_2)}u(x-y_1)\bar{u}(x-y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$. En utilisant l'identité du parallélogramme, on obtient

$$\Delta=\left(\frac{2}{s}\right)^{n/2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}u(x-y)e^{2i\pi\xi y}e^{-\frac{\pi}{s}|y|^2}\,\mathrm{d}y\right|^2\geq 0$$

Rappelons que $\forall u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),(a^wu,u)_{\mathrm{L}^2}=\int_0^{+\infty}(a_s^wu,u)_{\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{d}s}{s}=\int_0^{+\infty}((a_s*\Gamma_s)^wu,u)_{\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{d}s}{s}-\int_0^{+\infty}(r_s^wu,u)_{\mathrm{L}^2}\frac{\mathrm{d}s}{s}$ car $a_s*\Gamma_s=a_s+r_s$. Ainsi, $(a^wu,u)_{\mathrm{L}^2}\geq-\int_0^{+\infty}(r_s^wu,u)\frac{\mathrm{d}s}{s}$. Il suffit donc de montrer que $\int_0^{+\infty}(r_s^wu,u)\frac{\mathrm{d}s}{s}\overset{(*)}{=}O(\|u\|_{\mathrm{L}^2}^2)$. Or, par la même preuve que précédemment on a $\int_0^{+\infty}(r_s^wu,u)\frac{\mathrm{d}s}{s}=(Q^w(x,\mathrm{D}_x)u,u)_{\mathrm{L}^2}$ où $Q(x,\xi):=\int_0^{+\infty}r_s(x,\xi)\frac{\mathrm{d}s}{s}$. On va montrer que $Q\in\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty$, ce qui impliquera que $Q\in\mathcal{B}(\mathrm{L}^2)$ ce qui garantira que $(*)$ est vérifiée. On a $r_s(X)=\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\int_0^1(1-\theta)a_s''(X-\theta Y)Y^2\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y\mathrm{d}\theta$. On remarque que $\int_{\mathbb{R}^{2n}}\eta_jy_j\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y=0=\int_{\mathbb{R}^{2n}}y_jy_k\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y$ pour $j\neq k$ (par imparité). En procédant à un développement de Taylor à l'ordre 4 (!), on obtient :

$$\begin{aligned}r_s(X)=&\sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial^\alpha a_s}{\alpha!}(X)\int_{\mathbb{R}^{2n}}Y^\alpha\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y-\sum_{|\alpha|=3}\frac{\partial^\alpha a_s}{\alpha!}(X)\int_{\mathbb{R}^{2n}}Y^\alpha\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y\\&+\int_0^1\iint_{\mathbb{R}^{2n}}\frac{(1-\theta)^3}{3!}a_s^{(4)}(X-\theta Y)Y^4\Gamma_s(Y)\,\mathrm{d}Y\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{8\pi}\sum_{j=1}^n\left(s\partial_{x_j}^2a_s(X)+\frac{1}{s}\partial_{\xi_j}^2a_s(X)\right)+\tilde{r}_s(X)\end{aligned}$$

où $\tilde{r}_(X)$ est égal à la dernière intégrale.

- Montrons que $\int_0^{+\infty}s\partial_{x_j}^2a_s(x,\xi)\frac{\mathrm{d}s}{s}\in\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty$. L'intégrale est égale à $\int_0^{+\infty}\partial_{x_j}^2a(x,\xi)\phi(s\langle\xi\rangle)\,\mathrm{d}s=\underbrace{\partial_{x_j}^2a(x,\xi)}_{\mathcal{S}_{1,0}^1}(\int_0^{+\infty}\phi(t)\,\mathrm{d}t)\underbrace{\langle\xi\rangle^{-1}}_{\mathcal{S}_{1,0}^{-1}}\in\mathcal{S}_{1,0}^0\subseteq\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty$.
- Montrons que $\int_0^\infty\frac{1}{s}\partial_{\xi_j}^2a_s(x,\xi)\frac{\mathrm{d}s}{s}\in\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty$. L'intégrale et égale à (on utilise la formule de Leibniz) :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\partial_{\xi_j}^2(a(x,\xi)\phi(s\langle\xi\rangle))\frac{\mathrm{d}s}{s^2}=&(\partial_{\xi_j}^2a(x,\xi))\int_0^{+\infty}\phi(s\langle\xi\rangle)\frac{\mathrm{d}s}{s^2}+2\partial_{\xi_j}(\langle\xi\rangle)(\partial_{\xi_j}a(x,\xi)\int_0^{+\infty}\phi'(s(\langle\xi\rangle))\frac{\mathrm{d}s}{s}\\&+a(x,\xi)\int_0^{+\infty}\frac{\phi'(s\langle\xi\rangle)}{s}\partial_{\xi_j}^2(\langle\xi\rangle)+\phi''(s\langle\xi\rangle)(\partial_{\xi_j}\langle\xi\rangle)^2\,\mathrm{d}s\\=&(\xi_j^2a)\langle\xi\rangle\int_0^{+\infty}\phi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}+2\partial_{\xi_j}\langle\xi\rangle\partial_{\xi_j}a\int_0^{+\infty}\phi'(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&+a(x,\xi)\partial_{\xi_j}^2\langle\xi\rangle\int_0^{+\infty}\phi'(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}+a(\partial_{\xi_j}\langle\xi\rangle)^2\langle\xi\rangle^{-1}\int_0^{+\infty}\phi''(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En faisant les comptes, on se rend compte que chaque partie est dans $\mathcal{S}_{1,0}^0\subseteq\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty$ (en particulier, ∂_{ξ_j} fait baisser l'exposant de 1 et $\langle\xi\rangle^m\in\mathcal{S}_{1,0}^m$). Il reste à étudier $\rho(X):=\frac{1}{6}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^{2n}}(1-\theta)^3a_s^{(4)}(X-\theta Y)(Y,Y,Y,Y)\Gamma_s(Y)\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}Y\mathrm{d}\theta$. On rappelle que $a_s(x,\xi)=a(x,\xi)\phi(s\langle\xi\rangle)$ où $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R}_+)$. En particulier, $\operatorname{supp}\phi\subseteq[\kappa_0,\kappa_1]$ où $0<\kappa_0<\kappa_1$. Or, $\langle\xi\rangle\approx\Theta(\frac{1}{s})$ (*i.e.* un grand « oh » dans les deux sens) sur le support de ϕ et $\partial_\xi(\phi(s\langle\xi\rangle))=\phi'(s\langle\xi\rangle)s\partial_{\xi_j}(\langle\xi\rangle)\leq\|\phi'\|_{\mathrm{L}^\infty}\partial_{\xi_j}\langle\xi\rangle\frac{\kappa_1}{\langle\xi\rangle}$. On vérifie que $\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\exists c_\alpha>0,\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\forall s>0,|\partial_\xi^\alpha\phi(s\langle\xi\rangle)|\leq c_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$ et donc $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n,\exists c_{\alpha,\beta}>0,\forall x,\xi\in\mathbb{R}^n,\forall s>0,|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a_s(x,\xi)|\leq c_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{1-|\beta|}\leq\widetilde{c_{\alpha,\beta}}s^{-1+|\beta|}$. Rappelons que si A est une forme k-linéaire symétrique alors $\sup_{\|T\|=1}|AT^k|\approx\sup_{\substack{\|T_j\|=1\\1\leq j\leq k}}|A(T_1,\ldots,T_k)|$.

Notre dernière inégalité étant équivalente à $\forall T=(t,\tau), \forall \ell \geq 0, \exists c_\ell > 0, |a_s^\ell(X)T^\ell| \leq c_\ell \frac{1}{s} g_s(T)^{\ell/2}$ où $g_s(T) := |t|^2+s^2|z|^2$. On a $\rho^{(k)}(T^k) = \frac{1}{6}\int_0^1\int_0^\infty \iint_{\mathbb{R}^{2n}} (1-\theta)^3 a_s^{(k+4)}(X-\theta Y)(T^k, Y^4)\Gamma_s(Y)\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}Y\mathrm{d}\theta$. Ainsi, $|\rho^{(k)}(X)T^k| \leq \frac{2^n}{6}\int_0^1\int_0^{+\infty}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \underbrace{|a_s^{(k+4)}(X-\theta Y)(T^k,Y^4)|}_{\leq c_{k+4}s^{-1}g_s(T)^{k/2}g_s(Y)^{4/2}} e^{-2\pi(\frac{|y|^2}{s}+s|\eta|^2)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{d}Y\mathrm{d}\theta \lesssim \int_0^{\frac{\kappa_1}{\langle\xi\rangle}}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} g_s(T)^{k/2}($ $s^2|\eta|^2)^2 e^{-2\pi(\frac{|y|^2}{s}+s|\eta|^2)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta \lesssim \int_0^{\frac{\kappa_1}{\langle\xi\rangle}}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} g_s(T)^{k/2}e^{-\pi(\frac{|y|^2}{s}+s|\eta|^2)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta \lesssim \int_0^{\frac{\kappa_1}{\langle\xi\rangle}} g_s(T)^{k/2}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\kappa_1}{\langle\xi\rangle}}(|t|^2+s^2|z|^2)^{k/2}\,\mathrm{d}s \leq \frac{\kappa_1}{\langle\xi\rangle}(|t|^2+\frac{\kappa_1^2}{\langle\xi\rangle^2}|z|^2)^{k/2}$ et donc $\forall T\in\mathbb{R}^{2n}, \forall k\geq 0, \exists c_k \geq 0, |\rho^{(k)}(X)T^k| \leq c_k|T|^k$ est c'est exactement dire que $\rho \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty$.

□

7 Calcul semi-classique

Définition 7.1. Un symbole *semi-classique* d'ordre $m\in\mathbb{R}$ est une famille de fonctions régulières $a(\cdot,\cdot,h)$ $((a(\cdot,\cdot,h)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}))$ définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi$, dépendant d'un paramètre $h\in]0,1]$ et vérifiant :

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, \sup_{\substack{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}\\0<h\leq 1}} |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi,h)|h^{m-|\beta|} < +\infty$$

i.e. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n, \exists c_{\alpha,\beta}>0, \forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}, \forall h\in]0,1], |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi,h)| \leq c_{\alpha,\beta}h^{-m+|\beta|}$. On note $\mathcal{S}^m_{\mathrm{scl}}$ cette classe de symboles, qui est un espace de Fréchet pour les semi-normes suivantes :

$$\gamma_{k,m}(a) := \sup_{\substack{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}\\0<h\leq 1\\|\alpha|+|\beta|\leq k}} |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi,h)|h^{m-|\beta|} < +\infty$$

Remarque 7.2. Le paramètre h se veut être l'analogue de la constante de Planck ; scl désigne « semi-classique ».

Exemple 7.3. $a(x,\xi,h) = b(x,h\xi)$ où $b\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n})$. Alors $a\in\mathcal{S}^0_{\mathrm{scl}}$; on va voir que le calcul symbolique dans la classe $\mathcal{S}^m_{1,0}$ correspond « essentiellement » à un calcul symbolique classique avec le petit paramètre $\frac{1}{\langle\xi\rangle}$.

Théorème 7.4. *Soit $a\in\mathcal{S}^m_{\mathrm{scl}}$ avec $m\in\mathbb{R}$. L'opérateur*

$$h^m a(x,\mathrm{D}_x,h) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

est continu. De plus, les constantes apparaissant dans les estimations exprimant cette propriété de continuité sont uniformes par rapport à $0<h\leq 1$. C'est-à-dire :

$$\forall k\geq 0, \exists\ell\geq 0, \exists c>0, \forall h\in]0,1], \forall u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \sup_{|\alpha|+|\beta|\leq k}|x^\alpha\partial_x^\beta(h^m a(x,\mathrm{D}_x,h)u)| \leq c\sup_{|\alpha|+|\beta|\leq\ell}|x^\alpha\partial_x^\beta u|$$

Démonstration. $h^m a(x,\mathrm{D}_x,h) = \mathrm{Op}_0(h^m a(x,\xi,h)$ où $(h^m a(x,\xi,h))_{0<h\leq 1}$ uniformément bornée dans $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n})$. Le résultat découle de la propriété $b(x,\mathrm{D}_x):\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ continu si $b\in\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{2n})$ plus la propriété que les constantes ne dépendent que des semi-normes de b. □

Théorème 7.5. *Soit $a\in\mathcal{S}^m_{\mathrm{scl}}$ où $m\in\mathbb{R}$. L'opérateur :*

$$h^m a(x,\mathrm{D}_x,h) : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

est continu avec une norme indépendante du paramètre $0<h\leq 1$, i.e :

$$\exists c>0, \forall u\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n), \|a(x,\mathrm{D}_x,h)u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c}{h^m}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

Démonstration. $(h^m a(x,\xi,h)_{0<h\leq 1}$ est bornée dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$ plus résultat $b(x,\mathrm{D}_x):\mathrm{L}^2\to\mathrm{L}^2$ continu si $b\in\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$ plus contrôle de la norme de $\|b(x,\mathrm{D}_x)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2)}$ par un nombre fini de semi-normes de b. □

Théorème 7.6. *Soient $a_1\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1}, a_2\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_2}$ avec $m_1,m_2\in\mathbb{R}$. La composition $a_1(x,D_x,h)a_2(x,\mathrm{D}_x,h)$: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur continu, égal à :*

$$a_1(x,\mathrm{D}_x,h)a_2(x,\mathrm{D}_x,h)=(a_1\#a_2)(x,\mathrm{D}_x,h)$$

où $a_1\#a_2\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1+m_2}$ est donné par :

$$(a_1\#a_2)(x,\xi,h)=e^{2i\pi\mathrm{D}_y\cdot\mathrm{D}_\eta}(a_1(x,\xi+\eta,h)a_2(y+x,\xi,h))|_{y,\eta=0}$$

Démonstration. Conséquence directe du résultat connu pour $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ car $(h^{m_1}a_1)_{0<h\leq 1}$ et $(h^{m_2}a_2)_{0<h\leq 1}$ sont uniformément bornées dans $\mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty$, et l'on vérifie que $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(a_1\#a_2)(x,\xi,h)=e^{2i\pi\mathrm{D}_y\mathrm{D}_\eta}(\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta[a_1(x,\xi+\eta,h)a_2(y+x,\xi,h)])|_{y,\eta=0}$. □

Théorème 7.7. *Soient $a_1\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1}, a_2\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_2}$, $m_1,m_2\in\mathbb{R}$. L'opérateur $a_1\#a_2\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1+m_2}$ admet le développement asymptotique suivant :*

$$\forall N\geq 0, a_1\#a_2=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\underbrace{\overbrace{\mathrm{D}_\xi^\alpha a_1}^{\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1-|\alpha|}}\overbrace{\partial_x^\alpha a_2}^{\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_2}}}_{\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1+m_2-|\alpha|}}+r_N(a_1,a_2)$$

où $r_N(a_1,a_2)\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1+m_2-N}$.

Démonstration. Adaptation de la preuve donnée pour la classe $\mathcal{S}_{1,0}^m$. □

Théorème 7.8. *Soit $a\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^m$ où $m\in\mathbb{R}$. L'application :*

$$\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{S}_\mathrm{scl}^m & \to & \mathcal{S}_\mathrm{scl}^m\\ a & \mapsto & a^*=J\bar{a}\end{array}\right.$$

est continue, où a^* est le symbole en quantification standard de l'opérateur $A^*:\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ adjoint de $A=a(x,\mathrm{D}_x,h):\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\to\mathrm{L}^2(R^n)$, vérifiant $\forall u,v\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n),(Au,v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}=(u,A^*v)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)}$. De plus, $\forall N\geq 0$:

$$a^*=\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}_\xi^\alpha\partial_x^\alpha\bar{a}+r_N(a)$$

où $r_N(a)\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m-N}$.

Démonstration. Adaptation de la preuve donnée pour $\mathcal{S}_{1,0}^m$. □

Corollaire 7.9. *Soient $a_1\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1}, a_2\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_2}$ avec $m_1,m_2\in\mathbb{R}$. Alors :*

(i) $a_1\#a_2\equiv a_1a_2 \mod \mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1+m_2-1}$;

(ii) $a_1\#a_2-a_2\#a_1\equiv\frac{1}{2i\pi}\{a_1,a_2\} \mod \mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m_1+m_2-2}$;

(iii) $\forall a\in\mathcal{S}_\mathrm{scl}^m, a^*\equiv\bar{a} \mod \mathcal{S}_\mathrm{scl}^{m-1}$.

En particulier :

(i) $\|a_1(x,\mathrm{D}_x,h)a_2(x,\mathrm{D}_x,h)-(a_1a_2)(x,\mathrm{D}_x,h)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2)}=O(h^{-m_1-m_2+1})$;

(ii) $\|a_1(x,\mathrm{D}_x,h)a_2(x,\mathrm{D}_x,h)-a_2(x,\mathrm{D}_x,h)a_1(x,\mathrm{D}_x,h)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2)}=O(h^{-m_1-m_2+1})$.

Remarque 7.10. On rappelle que le crochet de Poisson est donné par $\{a_1,a_2\}:=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a_1}{\partial\xi_j}\frac{\partial a_2}{\partial x_j}-\frac{\partial a_1}{\partial x_j}\frac{\partial a_2}{\partial\xi_j}\right)$.

Théorème 7.11 (Lemme de Borel)**.** *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $(c_j)_{j\geq 0}$ une suite de symboles qui vérifient $c_j \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{m-j}$. Il existe un symbole $c \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{m}$ tel que :*

$$\forall N \geq 1, c - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{m-N}$$

On note $c \sim \sum_{j=0}^{+\infty} c_j$.

Démonstration. Adaptation de la preuve précédente. □

Soit $(a_j)_{j\geq 0}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ ne dépendant pas de $h \in]0,1]$. Alors $h^j a_j(x, h\xi) \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-j}$ donc d'après le lemme de Borel, il existe $a(x,\xi,h) \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{0}$ tel que $a(x,\xi,h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j a_j(x,h\xi)$. On a en particulier $a(x,\xi,h) = a_0(x,\xi,h) \mod \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-1}$.

Définition 7.12. On dit que $a_0(x,\xi)$ est le *symbole principal* de a.

Soient $a, b \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{0}$ tels que $a(x,\xi,h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j a_j(x,h\}i)$ et $b(x,\xi,h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j b_j(x,h\xi)$, où $(a_j)_{j\geq 0}$ et $(b_j)_{j\geq 0}$ sont des suites de fonctions $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ ne dépendant pas de $h \in]0,1]$. Alors $a(x,\mathrm{D}_x,h)b(x,\mathrm{D}_x,h) - \mathrm{Op}_0(a_0(x,h\xi)b_0(x,h\xi)) \in \mathrm{Op}_0(\mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-1})$.

Soit $a \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$; on sait que $a(x,h\xi) \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{0}$. On a $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$a(x, h\mathrm{D}_x)u(x) := \mathrm{Op}_0(a(x,h\xi))u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,h\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Par le changement de variable $\tilde{\xi} = h\xi$, on obtient $a(x,h\mathrm{D}_x)u(x) = \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i\pi(x-y)\tilde{\xi}}{h}} a(x,\tilde{\xi})u(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$. On peut développer le calcul semi-classique dans un cadre légèrement différent en définissant la quantification semi-classique de symboles $a \in \mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ ne dépendant pas de $h \in]0,1]$:

$$a(x,h\mathrm{D}_x)u(x) = \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i\pi(x-y)\xi}{h}} a(x,\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

et

$$a^w(x,h\mathrm{D}_x)u(x) = a^{w_h}u(x) = \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i\pi(x-y)\xi}{h}} a\left(\frac{x+y}{2}\right)u(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$

Parlons maintenant de l'inversion des opérateur elliptiques.

Théorème 7.13. *Soit $a \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{m}$ elliptique dans la classe $\mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{m}$, c'est-à-dire :*

$$\inf_{\substack{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}\\0<h\leq 1}} h^m|a(x,\xi,h)| > 0$$

Il existe un $a \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-m}$ tel que :

$$\begin{aligned} b(x,\mathrm{D}_x,h)a(x,\mathrm{D}_x,h) &= \mathrm{id}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} + r_1(x,\mathrm{D}_x,h)\\ a(x,\mathrm{D}_x,h)b(x,\mathrm{D}_x,h) &= \mathrm{id}_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} + r_2(x,\mathrm{D}_x,h)\end{aligned}$$

où $r_1, r_2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-\infty}$.

Définition 7.14. On dit que $b(x,\mathrm{D}_x,h)$ est une paramétrixe de l'opérateur $a(x,\mathrm{D}_x,h)$.

Corollaire 7.15. *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe $h_0 \in]0,1]$ tel que $\forall h \in]0,h_0]$, l'opérateur $a(x,\mathrm{D}_x,h) : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est un automorphisme.*

Démonstration. Cela résulte du fait que si $R \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n))$ est tel que $\|R\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n))} < 1$ alors $I - R$ est un automorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, d'inverse donné par la série de Neumann $(I-R)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} R^k$. Dans notre cas, $r_j \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-\infty}$ et donc $\|r_j(x, \mathrm{D}_x, h)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2)} = O(h^\infty)$ (note [3]) *i.e.* $\forall N \geq 0, \|r_j(x, \mathrm{D}_x, h)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2)} = O(h^N)$; ainsi, pour h assez petit on peut inverser r_j. □

Théorème 7.16. *Soient* $\chi \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^0$ *et* $a \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^m$ *où* $m \in \mathbb{R}$ *tels que* $\inf_{\substack{(x,\xi) \in \operatorname{supp} \chi(\cdot,\cdot,h) \\ 0<h\leq 1}} |a(x,\xi,h)| > 0$ *et soit* $\psi \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^0$ *telle que* $\forall 0 < h \leq 1$, $\operatorname{supp} \psi \subseteq \overbrace{\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} : \chi(x,\xi,h) = 1\}}^{\circ}$. *Alors il existe* $b \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-m}$ *tel que :*

$$b(x, \mathrm{D}_x, h) a(x, \mathrm{D}_x, h) = \psi(x, \mathrm{D}_x, h) + r(x, \mathrm{D}_x, h)$$

o $r \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^{-\infty}$.

Remarque 7.17. Il faut penser à χ comme une fonction de troncature.

Théorème 7.18 (Gårding)**.** *Soit* $a \in \mathcal{S}_{\mathrm{scl}}^0$ *un symbole positif, i.e.* $\forall 0 < h \leq 1, \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, a(x,\xi,h) \geq 0$. *Alors :*

(*i*) $\exists h_0 \in]0,1], \exists C > 0, \forall h \in]0, h_0], \forall u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n), \mathrm{Re}(a(x, \mathrm{D}_x, h)u, u)_{\mathrm{L}^2(R^n)} + Ch\|u\|_{\mathrm{L}^2}^2 \geq 0$;

(*ii*) $\exists h_0 \in]0,1], \exists c > 0, \forall h \in]0, h_0], \forall u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n), (a^w(x, \mathrm{D}_x, h)u, u)_{\mathrm{L}^2(R^n)} + Ch\|u\|_{\mathrm{L}^2}^2 \geq 0$.

Théorème 7.19 (Inégalité de Fefferman–Phong)**.** *Sous les hypothèses du théorème précédent :*

$$\exists h_0 \in]0,1], \exists C > 0, \forall h \in]0, h_0], \forall u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n), (a^w(x, \mathrm{D}_x, h)u, u)_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} + Ch^2\|u\|_{\mathrm{L}^2} \geq 0$$

8 Opérateurs pseudo-différentiels sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 8.1. Soient $m \in \mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit la classe $\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions $a(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ qui vérifient :

$$\forall K \text{ compact} \subseteq \Omega, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists c_{K,\alpha,\beta} > 0, \forall (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n,$$
$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq c_{K,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}$$

Remarque 8.2. La variable x désigne la position ($\to$ peut être borné) et ξ la vitesse ($\to$ *a priori* par borné).

Exemple 8.3. Les opérateurs différentiels d'ordre $m \in \mathbb{N}$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ont des symboles dans la classe $\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. En effet, $Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathrm{D}_x^\alpha u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,\xi) \hat{u}(\xi) \,\mathrm{d}\xi$ où $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \in \mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Théorème 8.4. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. *L'opérateur :*

$$a(x, \mathrm{D}_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi} a(x,\xi) \hat{u}(\xi) \,\mathrm{d}\xi$$

définit un opérateur continu :

$$a(x, \mathrm{D}_x) : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Remarque 8.5. Si pour tout $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, on prolonge u par 0 en dehors de son support alors cette fonction (encore notée u) est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3. « Notation affreuse à éviter absolument. »

Remarque 8.6. Rappelons que si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \ni u$, on dit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)} u$ si $\exists K$ compact $\subseteq \Omega$ tel que $\forall n \geq 0, \operatorname{supp} u_n, \operatorname{supp} u \subseteq K$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \sup_{x\in K} |\partial^\alpha u_n(x) - \partial^\alpha u(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ c'est la même chose, mais pour tout compact et sans l'hypothèse sur les supports.

Démonstration. On vérifie par le théorème de dérivation sous le signe somme que $\partial_x^\alpha[a(x,\mathrm{D}_x)u] = \sum_{0\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}(2i\pi\xi)^\beta \partial_x^{\alpha-\beta}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Soit K_0 un compact de Ω et $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} u \subseteq K_0$. On a On a $\forall\alpha, \forall x \in K, |\partial_x^\alpha[a(x,\mathrm{D}_x)u]| \leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}(2i\pi\xi)^\beta\partial_x^{\alpha-\beta}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

Soit K un autre compact inclus dans Ω. On a :

$$\forall x \in K, |\partial_x^\alpha[a(x,\mathrm{D}_x)u]| \leq \sum_{0\leq\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_{\mathbb{R}^n}(2\pi|\xi|)^{|\beta|}\underbrace{|\partial_x^{\alpha-\beta}a(x,\xi)|}_{\leq c_{\alpha,\beta,K}\langle\xi\rangle^m}|\hat{u}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi$$

Ainsi, $\sup_{x\in K}|\partial_x^\alpha[a(x,\mathrm{D}_x)u](x)| \leq c\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{m+|\alpha|+n+1}\frac{|\hat{u}(\xi)|}{\langle\xi\rangle^{m+1}}\,\mathrm{d}\xi \leq c\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\langle\xi\rangle^{m+n+1+|\alpha|}\hat{u}(\xi)|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\langle\xi\rangle^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi$, et par continuité de $u \mapsto \hat{u}$ dans $\mathcal{S}$ on obtient l'existence de $c_1 > 0$ et $k_1 \geq 0$ tels que la quantité précédente soit majorée par $c_1 \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|\beta|+|\gamma|\leq k_0}}|x^\beta\partial_x^\gamma u(x)| \leq \hat{c}_{K_0}\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\|\gamma|\leq k_0}}|\partial_x^\gamma u(x)|$.

Finalement, pour tout K, K_0 compacts $\subseteq \Omega$, $\exists k_0 \geq 0, \exists c > 0$ tels que $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp} u \subseteq K_0, \sup_{\substack{x\in K\\|\alpha|\leq\ell}}|\partial_x^\alpha[a(x,\mathrm{D}_x)u]| \leq c\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\alpha|\leq k_0}}|\partial_x^\alpha u(x)|$. □

Théorème 8.7. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^m(\Omega\times\mathbb{R}^n)$. L'opérateur $a(x,\mathrm{D}_x)$ définit un opérateur continu de $\mathrm{H}_{\mathrm{comp}}^{s+m}(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ où :*

$$\mathrm{H}_{\mathrm{comp}}^s(\Omega) := \{u \in \mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathbf{1}_\Omega u \in \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)\}$$
$$\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^s(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \forall\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \phi u \in \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)\}$$

En particulier, $u_n \xrightarrow{\mathrm{H}_{\mathrm{loc}}^s} u \iff \forall\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \phi u_n \xrightarrow{\mathrm{H}^s} \phi u$ et $u_n \xrightarrow{\mathrm{H}_{\mathrm{comp}}^s(\mathbb{R}^n)} u \iff \mathbf{1}_\Omega u_n \xrightarrow{\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)} \mathbf{1}_\Omega u$.

Démonstration. Pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \phi(x)a(x,\mathrm{D}_x)$ a pour symbole $\underbrace{\phi(x)}_{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}\underbrace{a(x,\xi)}_{\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^m} \in \mathcal{S}_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$. On sait que $\phi(x)a(x,\mathrm{D}_x) : \mathrm{H}^{s+m}(\mathbb{R}^n)(\supseteq \mathrm{H}_{\mathrm{comp}}^{s+m}(\mathbb{R}^n)) \to \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est continu. En particulier, $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subseteq \mathrm{H}_{\mathrm{comp}}^{s+m}(\Omega)$, l'opérateur $\phi(x)a(x,\mathrm{D}_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}\phi(x)a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ vérifie

$\exists c > 0, \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \|\phi(x)a(x,\mathrm{D}_x)u\|_{\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{\mathrm{H}^{s+m}(\mathbb{R}^n)}$.

Remarque 8.8. La formule intégrale n'est valable *a priori* que pour les fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

L'opérateur se prolonge donc de manière unique en un opérateur borné $\phi(x)a(x,\mathrm{D}_x) : \mathrm{H}^{s+m}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$. □

Théorème 8.9. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^m(\Omega\times\mathbb{R}^n)$. L'opérateur :*

$$a(x,\mathrm{D}_x) : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

défini par

$$\forall\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle a(x,\mathrm{D}_x)u, \phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle\hat{u}, V\phi\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$$

où $V\phi(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)a(x,\xi)e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, est continu.

Justification de la définition. Formellement, $a(x,\mathrm{D}_x)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et donc

$$\langle a(x,\mathrm{D}_x)u, \phi\rangle_{\mathcal{D}',\mathrm{D}} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}(\xi)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)a(x,\xi)e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x}_{V\phi(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

□

Démonstration. Soit K un compact inclus dans Ω. Soit $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ tel que $\chi = 1$ au voisinage de K. On a $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(K), \operatorname{supp} \phi \subseteq K, V\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\chi(x)a(x,\xi)e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$.

On considère l'application $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ni \psi \mapsto T\psi(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\chi(x)a(x,\xi)e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x$; on veut montrer que $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue. On a $T\psi(\xi) = \langle\xi\rangle^m \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\xi}\chi(x)a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m}\psi(x)\,\mathrm{d}x$. Or, $\psi \in \mathcal{S}$ donc on peut écrire $\psi = \widehat{\mathcal{F}^{-1}\psi}$ d'où $T\psi(\xi) = \langle\xi\rangle^m b(x,\mathrm{D}_\xi)[\mathcal{F}^{-1}\psi]$ où $b(y,\eta) = \chi(\eta)a(\eta,y)\langle y\rangle^m \in \mathcal{C}_\mathrm{b}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Or, $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ continu, $b(\xi,\mathrm{D}_\xi) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ continu et $\langle\xi\rangle^m : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ continu d'où $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ continu. Il s'ensuit que $\forall k \geq 0, \exists c > 0, \exists \ell \geq 0, \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|+|\beta|\leq k}} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta V\phi(\xi) \leq c \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n, |\alpha|+|\beta|\leq\ell} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \phi(\xi)| \leq c_K \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\leq\ell}} \partial_\xi^\alpha \phi(\xi)|$.

Soit K un compact inclus dans Ω. On a $\forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp}\phi \subseteq K, |\langle a(x,\mathrm{D}_x)u, \phi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}| = \langle \hat{u}(\xi), V\phi(\xi)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}| \leq$ (car $\hat{u} \in \mathcal{S}'$) $c \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|+|\beta|\leq k}} |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta V\phi(\xi)| \leq c_K \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^n \\ |\alpha|\leq\ell}} |\partial_\xi^\alpha \phi(\xi)|$ et donc $a(x,\mathrm{D}_x)u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On vérifie aisément que $u_n \xrightarrow{\mathcal{E}'(\Omega} u \implies a(x,\mathrm{D}_x)u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} a(x,\mathrm{D}_x)u$. □

Définition 8.10. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{R}$. L'ensemble des opérateurs $a(x,\mathrm{D}_x)$ pour $a \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ définis dans les théorèmes précédents est appelé ensemble des *opérateurs pseudo-différentiels* d'ordre m sur Ω.

Remarque 8.11. Malheureusement, $a \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ vérifie $a(x,\mathrm{D}_x) : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et NON $a(x,\mathrm{D}_x) : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$: on ne peut pas composer de tels opérateurs :(

On considère une partition de l'unité *localement finie* sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, *i.e.*

$$\forall x \in \Omega, 1 = \sum_{j=0}^{+\infty} \phi_j(x) \quad \text{où } \phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega,[0,1])$$

telle que $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\phi_j|_K = 0$ pour tout $j \geq 0$ sauf pour un nombre fini. De plus, $\phi_K := \sum_{j:\operatorname{supp}\phi_j\cap K\neq\emptyset} \phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega,[0,1])$ vérifie $\phi_K \equiv 1$ au voisinage de K.

Soit $a \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. On considère l'opérateur :

$$\widetilde{A}u := \sum_{\substack{j,k\geq 0 \\ \operatorname{supp}\phi_j\cap\operatorname{supp}\phi_k\neq\emptyset}} \phi_j a(x,\mathrm{D}_x)\phi_k u$$

(pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$). Le symbole de l'opérateur $\phi_j a(x,\mathrm{D}_x)\phi_k$ est donné par $(\phi_j(x)a(x,\xi))\#\phi_k(x)$. On a $a \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et $\phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ donc $\phi_j(x)a(x,\xi) \in \mathcal{S}_{1,0}^m$. De plus, $\phi_k \in \mathcal{S}_{1,0}^0$ (!) donc $(\phi_(x)a(x,\xi))\#\phi_k \in \mathcal{S}_{1,0}^m$. On définit $\Phi_j := \sum_{k\in J_j} \phi_k$ où $J_j := \{k \geq 0 : \operatorname{supp}\phi_j \cap \operatorname{supp}\phi_k \neq \emptyset\}$ (ensemble fini car (ϕ_l) est localement fini)). En particulier, $\Phi_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega,[0,1])$ et $\Phi_j \equiv 1$ au voisinage de $\operatorname{supp}\phi_j$. Il s'ensuit que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \phi_j(x)\partial_x^\alpha(1-\Phi_j(x)) = 0$. Le symbole de $\widehat{A} = \sum_{j\geq 0} \phi_j a(x,\mathrm{D}_x)\Phi_j$ est donné par $\tilde{a}(x,\xi) := \sum_{j\geq 0} \underbrace{(\phi_j(x)a(x,\xi))\#\Phi_j(x)}_{\mathcal{S}_{1,0}^m}$; la somme étant localement finie on a donc $\tilde{a} \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ (sur chaque compact la somme est finie).

On a $a - \tilde{a} = a \cdot 1 - \sum_j (\phi_j a)\#\Phi_j = \sum_j \phi_j a - \sum_j (\phi_j a)\#\Phi_j = \sum_j \underbrace{(\phi_j a)}_{\mathcal{S}_{1,0}^m} \# \underbrace{(1-\Phi_j)}_{Sun^0}$, chaque terme étant un # de fonctions à supports disjoint. Ainsi, chaque terme est dans $\mathcal{S}_{1,0}^{-\infty}$; la somme étant localement finie, on en déduit que $a - \tilde{a} \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n) := \cap_{m\in\mathbb{R}} \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Proposition 8.12. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Il existe un symbole $\tilde{a} \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tel que :*

(*i*) *$a(x,\mathrm{D}_x) - \tilde{a}(x,\mathrm{D}_x) \in \mathcal{S}_\mathrm{loc}^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et envoie $\mathcal{E}'(\Omega)$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$;*

(*ii*) *l'opérateur* $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)$ *est* proprement supporté *et :*

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(x,\mathrm{D}_x) : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) &\to \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) && \textit{continuement}\\
\mathcal{C}^\infty(\Omega) &\to \mathcal{C}^\infty(\Omega) && \textit{continuement}\\
\mathcal{E}'(\Omega) &\to \mathcal{E}'(\Omega) && \textit{continuement}\\
\mathcal{D}'(\Omega) &\to \mathcal{D}'(\Omega) && \textit{continuement}\\
\mathrm{H}^{s+m}_{\mathrm{comp}}(\Omega) &\to \mathrm{H}^{s}_{\mathrm{comp}}(\Omega) && \textit{continuement}\\
\mathrm{H}^{s+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega) &\to \mathrm{H}^{s}_{\mathrm{loc}}(\Omega) && \textit{continuement}
\end{aligned}$$

$(\forall s \in \mathbb{R})$.

Remarque 8.13. On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}'(V) \to \mathcal{D}'(U)$ est *proprement supporté* si :

(*i*) $\forall L$ compact $\subseteq V, \exists K$ compact $\subseteq U, \operatorname{supp} u \subseteq L \implies \operatorname{supp} Au \subseteq K$:

(*ii*) $\forall K$ compact $\subseteq U, \exists L$ compact $\subseteq V, \operatorname{supp} u \subseteq L^c \implies \operatorname{supp} Au \subseteq K^c$.

Démonstration. On a déjà vérifié que $a - \tilde{a} \in \mathcal{S}^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. On utilise le fait que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = \cup_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{H}^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)$. L'opérateur, $a(x, \mathrm{D}_x) - \tilde{a}(x, \mathrm{D}_x : \mathcal{E}'(\Omega) = \cup_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{H}^s_{\mathrm{comp}}(\Omega) \to \cap_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On utilise la proposition suivante.

Proposition 8.14 (Injections de Sobolev)**.** *Si* $s > \frac{n}{2} + k$ *où* $k \in \mathbb{N}$ *alors* $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

et donc $\cap_{s\in\mathbb{R}} \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

On a $\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)u = \sum_j \phi_j(x) \underbrace{a(x, \mathrm{D}_x) \overbrace{\Phi_j(x)u(x)}^{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}}_{\mathcal{C}^\infty(\Omega)}$. Comme $\#\{j \geq 0 : \operatorname{supp} \Phi_j \cap \operatorname{supp} u \neq \emptyset\} < +\infty$. on en déduit que la somme précédente est finie. Ainsi, $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)u$ est une somme *finie* d'éléments de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ (car ϕ_j est à support compact) donc $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On vérifie aisément que $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x) : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ est continue.

Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \forall j \geq 0, \Phi_j u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ donc $a(x, \mathrm{D}_x)(\Phi_j u) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Ainsi, $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)u = \sum_{j\geq 0} \phi_j a(x, D_x)(\Phi_j u) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (car la somme est localement finie) ; on vérifie la continuité.

Soit $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$; en particulier, $K := \operatorname{supp} u$ est compact $\subseteq \Omega$. Ainsi, $\Phi_j u = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $j \geq 0$. On a donc $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)u = \sum_j \phi_j \underbrace{a(x, \mathrm{D}_x) \overbrace{(\Phi_j u)}^{\mathcal{E}'(\Omega)}}_{\mathcal{D}'(\Omega)(\text{thm. précédent})}$; d'après la remarque précédent, la somme est finie et donc comme ϕ_j est à support compact on récupère bien $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On vérifie que $a(x, \mathrm{D}_x) : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$.

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\tilde{a}(x, \mathrm{D}_x)u = \sum_j \phi_j \underbrace{a(x, \mathrm{D}_x) \overbrace{(\Phi_j u)}^{\mathcal{E}'(\Omega)}}_{\mathcal{D}'(\Omega)}$ et comme les ϕ_j sont à supports compacts, il suffit de vérifier qu'une somme *localement finie* de distributions reste une distribution. □

Soit $a \in \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ où $m \in \mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le résultat précédent permet de quantifier le symbole a en un opérateur *proprement supporté* noté Op_Ω par la formule :

$$\mathrm{Op}_\Omega(a)u := \sum_{j=0}^{+\infty} \phi_j a(x, \mathrm{D}_x)\Phi_j u \in \psi^m_{\mathrm{ps}}(\Omega)$$

où $(\phi_j)_j$ est une partition de l'unité localement finie dans Ω et $\Phi_j := \sum_{k:\operatorname{supp}\phi_k\cap\operatorname{supp}\phi_j\neq\emptyset}\phi_k$. On a une application :

$$\mathrm{Op}_\Omega : \left| \begin{array}{ccccc} \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n) & \to & \psi^m_{\mathrm{ps}}(\Omega) & \to & \psi^m_{\mathrm{ps}}(\Omega)/\psi^{-\infty}_{\mathrm{ps}}(\Omega) \\ a & \mapsto & \mathrm{Op}_\Omega(a) & \mapsto & \overline{\mathrm{Op}_\Omega(a)} \end{array} \right.$$

On vérifie que l'application $\mathrm{Op}_\Omega : \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n) \to \psi^m_{\mathrm{ps}}(\Omega)/\psi^{-\infty}_{\mathrm{ps}}(\Omega)$ ne dépend pas du choix de la partition de l'unité localement finie.

Remarque 8.15. Si $A \in \psi^{-\infty}_{\mathrm{ps}}(\Omega)$ alors $A : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. En effet, si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ montrons que $Au \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Pour cela, soit $\omega \subseteq \Omega$ un ouvert relativement compact et $\chi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur ω. La distribution χu est bien définie et c'est un élément de $\mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) = \cup_{s\in\mathbb{R}}\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\chi u \in \mathrm{H}^{s_0}(\mathbb{R}^n)$, et donc comme $\chi \equiv 1$ sur ω on a $u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\omega)$, d'où (comme $A = \mathrm{Op}_\Omega(a)$ où $a \in \mathcal{S}^{-\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$) $Au \in \mathrm{H}^{+\infty}(\omega)$ et donc $Au \in \mathcal{C}^\infty(\omega)$ (par injections de Sobolev) et finalement $Au \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Théorème 8.16. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, m_1, m_2 *des réels,* $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$, $a_2 \in \mathcal{S}^{m_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$. *L'opérateur* $\mathrm{Op}_\Omega(a_1)\mathrm{Op}_\Omega(a_2)$ *appartient à* $\psi^{m_1+m_1}_{\mathrm{ps}}(\Omega)$ *et vérifie :*

$$\forall N \geq 0, \mathrm{Op}_\Omega(a_1)\mathrm{Op}_\Omega(a_2) = \mathrm{Op}_\Omega\left(\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha_\xi a_1\partial^\alpha_x a_2\right) \mod \psi^{m_1+m_2-N}(\Omega)$$

De plus, $\mathrm{Op}_\Omega(a_1)^* = \mathrm{Op}_\Omega(a_1^*) \mod \psi^{-\infty}_{\mathrm{ps}}(\Omega)$ *où* $a^* \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\mathrm{D}^\alpha_\xi\partial^\alpha_x\bar{a} \in \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$.

9 Inversion des opérateurs (micro-)elliptiques

Définition 9.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(x_0,\xi_0) \in \mathring{\mathrm{T}}^*(\Omega) = \Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ (espace *cotangent* à Ω). On appelle *voisinage conique* du point $(x_0,\xi_0 \in \mathring{\mathrm{T}}^*(\Omega)$ tout ouvert de $\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ contenant un ensemble du type :

$$\omega_{(x_0,\xi_0)}(r) := \{(x,\xi) \in \Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}) : |x-x_0| < r, \left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right| < r, |\xi| \geq \frac{1}{r}\}$$

(c'est un secteur angulaire tronqué vers l'origine).

Définition 9.2. Soient $a \in \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $(x_0,\xi_0) \in \Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. On dit que le symbole a est *elliptique au point* (x_0,ξ_0) s'il existe un voisinage conique ω de (x_0,ξ_0) tel que :

$$\inf_{(x,\xi)\in\omega}\frac{|a(x,\xi)|}{|\xi|^m} > 0$$

Les points de $\mathring{\mathrm{T}}^*(\Omega)$ où a n'est pas elliptique sont dits *points caractéristiques.*

Définition 9.3.
1. Une fonction a définie sur $\Omega\times\mathbb{R}^n$ est dite *positivement homogène* de degré $m \in \mathbb{R}$ si $\forall x \in \Omega, \forall|\xi| \geq 1, \forall t \geq 1$, $a(x,t\xi) = t^m a(x,\xi)$.
2. Une fonction a définie sur $\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ est dite *positivement homogène* de degré $m \in \mathbb{R}$ si $\forall x \in \Omega, \forall\xi \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \forall t > 0, a(x,t\xi) = t^m a(x,\xi)$.

Lemme 9.4. *Soient* $a \in \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ *avec* $m \in \mathbb{R}$ *et* $(x_0,\xi_0) \in \Omega\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ *tel que* a *soit elliptique en* (x_0,ξ_0). *Si* $b \in \mathcal{S}^{m'}_{\mathrm{loc}}$ *avec* $m' < m$. *alors* $a+b$ *est elliptique en* (x_0,ξ_0).

En particulier, s'il existe $a_m \in \mathcal{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ *positivement homogène de degré* m *telle que :*

(i) $a_m(x_0, \frac{\xi}{|\xi_0|}) \neq 0$ *;*

(*ii*) $a - a_m \in \mathcal{S}^{m-1}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$;
alors a *est elliptique en* (x_0, ξ_0).

Exemple 9.5. Le symbole de l'opérateur différentiel $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\mathrm{D}_x^\alpha$ est elliptique en $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ si et seulement si $a_m(x_0, \xi_0) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\xi_0^\alpha \neq 0$ car le symbole de P est donné par $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

Remarque 9.6. Si $\mathrm{Op}_\Omega(a_1) = \mathrm{Op}_\Omega(a_2)$ où $a_j \in \mathcal{S}^m_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ alors $\mathrm{Op}_\Omega(a_1 - a_2) = 0$ dans $\psi^m_{\text{ps}}(\Omega)/\psi^{-\infty}_{\text{ps}}(\Omega)$. Ainsi, $\exists r \in \mathcal{S}^{-\infty}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tel que $(a_1 - a_2)(x, \mathrm{D}_x) = r(x, \mathrm{D}_x)$ et $\forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$, $\chi(x)(a_1 - a_2)(x, \mathrm{D}_x) = \chi(x)r(x, \mathrm{D}_x) \in \mathcal{S}^m_{1,0}$ et donc en appliquant Op_0, comme ce dernier opérateur est injectif on obtient $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n, \chi(x)(a_1 - a_2)(x, \xi) = \chi(x)r(x, \xi)$ et donc $a_1 - a_2 = r \in \mathcal{S}^{-\infty}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Finalement, les points caractéristiques des symboles a_1 et a_2 sont les mêmes. On peut donc définir l'*ensemble caractéristique* de l'opérateur pseudo-différentiel $\mathrm{Op}_\Omega(a)$ où $a \in \mathcal{S}^m_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$:

$$\mathrm{Char} := \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : (x, \xi) \text{ est un point caractéristique du symbole } a\}$$

(Char pour *characteristic set*).

Lemme 9.7 (technique)**.** *Soient* $a \in \mathcal{S}^m_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ *où* $m \in \mathbb{R}$ *et* $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *tel que* a *soit elliptique en* (x_0, ξ_0). *Il existe* $r > 0$ *et* $b \in \mathcal{S}^{-m}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ *elliptique en* (x_0, ξ_0) *tel que :*

$$\mathrm{Op}_\Omega(b)\mathrm{Op}_\Omega(a) = \mathrm{Op}_\Omega(\theta_{r,x_0,\xi_0}) + \underbrace{\mathrm{Op}_\Omega(\rho)}_{\psi^{-\infty}_{\text{ps}}(\Omega)}$$

soit elliptique en (x_0, ξ_0), *où* $\rho \in \mathcal{S}^{-\infty}_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ *et* $\theta_{r,x_0,\xi_0}(x, \xi) = \chi_0\left(\frac{|x-x_0|^2}{r^2}\right)\chi_0\left(\frac{\left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi_0}{|\xi_0|}\right|^2}{r^2}\right)(1 - \chi_0(2r^2|\xi|^2) \in \mathcal{S}^0_{1,0}$ *où* $\chi_0 \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$, $\chi_0 = 1$ *si* $|t| \leq 1$, $\chi_0 = 0$ *si* $|t| \geq 2$.

Remarque 9.8. On a $\theta_{r,x_0,\xi_0} = 1$ sur $\omega_{(x_0,\xi_0)}(r)$.

Définition 9.9. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathcal{S}^m_{\text{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n$ et $A = \mathrm{Op}_\Omega(a)$. On définit le *support essentiel* de A, noté $\mathrm{essupp}(A)$, comme le complémentaire dans $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ de l'ensemble des points (x_0, ξ_0) pour lesquels il existe un voisinage conique $\omega_{(x_0,\xi_0}$ de (x_0, ξ_0) tel que a soit d'ordre $-\infty$ sur $\omega_{(x_0,\xi_0)}$, *i.e.* :

$$\forall N \geq 0, \forall \alpha, \beta \in \mathrm{N}^n, \sup_{(x,\xi) \in \omega_{(x_0,\xi_0)}} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)||\xi|^N < +\infty$$

Proposition 9.10. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $A \in \psi^{m_1}_{\text{ps}}(\Omega)$, $B \in \psi^{m_2}(\Omega)$ *alors* $AB \in \psi^{m_1+m_2}_{\text{ps}}(\Omega)$ *et :*

$$\mathrm{essupp}(AB) \subseteq \mathrm{essupp}(A) \cap \mathrm{essupp}(B)$$

Démonstration. Si $(x_0, \xi_0) \in (\mathrm{essupp}(A) \cap \mathrm{essupp}(B))^c$ (complémentaire dans $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) = (\mathrm{essupp}(A))^c \cup (\mathrm{essupp}(B))^c$, disons $(x_0, \xi_0) \in (\mathrm{essupp}(A))^c$. Cela veut dire que A est d'ordre $-\infty$ dans un voisinage conique de (x_0, ξ_0). D'après le résultat de composition, c'est également le cas de l'opérateur AB obtenu par composition. □

Théorème 9.11. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $A \in \psi^m_{\text{ps}}(\Omega)$. *Soit* $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{Char}(A)$ *(i.e. A elliptique en* (x_0, ξ_0)*) ; il existe* $B \in \psi^{-m}_{\text{ps}}(\Omega)$ *tel que* $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{Char}(B)$, *il existe* $R, S \in \psi^0_{\text{ps}}(\Omega)$ *tels que :*

$$AB = I + R$$
$$BA = I + S$$

où $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{essupp}(R), \mathrm{essupp}(S)$, *i.e. R et S sont d'ordre* $-\infty$ *dans un voisinage conique de* (x_0, ξ_0).

Définition 9.12. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le *front d'onde* du u, noté $\mathrm{WF}(u)$ (pour *wave front set*), est défini comme le sous-ensemble de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ donc le complémentaire est donné par :

$$(\mathrm{WF}(u))^c := \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \exists \omega \text{ voisinage conique de } (x,\xi), \forall m \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^n), \\ \mathrm{supp}(a) \subseteq \omega \implies \mathrm{Op}_\Omega(a)u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

Remarque 9.13. Si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $\forall m \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathcal{S}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\mathrm{Op}_\Omega(a) : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ donc $\mathrm{WF}(u) = \emptyset$.

Proposition 9.14. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le front d'onde de u est un ensemble conique fermé de $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tel que :*

$$\pi(\mathrm{WF}(u)) = \operatorname{sing\,supp} u$$

où $\pi : \left| \begin{array}{ccc} \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \to & \Omega \\ (x,\xi) & \mapsto & x \end{array} \right.$ *et où* $\operatorname{sing\,supp} u$ *désigne le support singulier de u, défini par :*

$$(\operatorname{sing\,supp} u)^c := \{x \in \Omega : \exists V \text{ voisinage ouvert de } x \text{ dans } \Omega, \forall \chi \in \mathcal{C}^\infty_0(V), \chi u \in \mathcal{C}^\infty(V)\}$$

(complémentaire dans Ω).

Lemme 9.15. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a :*

$$\mathrm{WF}(u)^c = \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \exists \omega \text{ voisinage conique de } (x,\xi), \forall m \in \mathbb{R}, \forall A \in \psi^m_{\mathrm{ps}}(\Omega), \\ \operatorname{essupp} A \subseteq \omega \implies Au \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\}$$

(complémentaire dans $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$).

Théorème 9.16 (Théorème de régularité elliptique)**.** *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A \in \psi^m_{\mathrm{ps}}(\Omega)$. On a :*

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \mathrm{WF}(Au) \subseteq \mathrm{WF}(u) \subseteq \mathrm{WF}(Au) \cup \mathrm{Char}(A)$$

Remarque 9.17. La première inclusion est la propriété de *pseudo-localité*.

Soit u une solution de $Au = f$ où f est une fonction source connue. Le théorème dit que $\mathrm{WF}(u) \subseteq \mathrm{WF}(f) \cup \mathrm{Char}(A)$. En particulier, si A est globalement elliptique (*i.e.* $\mathrm{Char}(A) = \emptyset$) alors $\mathrm{WF}(u) = \mathrm{WF}(f)$ (les singularités de la solution et de la source sont les mêmes). En particulier, si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ alors $\mathrm{WF}(f) = \emptyset$ et donc $\mathrm{WF}(u) = \emptyset$ et donc $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ car $\pi(\mathrm{WF}(u)) = \operatorname{sing\,supp}(u) = \emptyset$.

Corollaire 9.18. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A \in \psi^m_{\mathrm{ps}}(\Omega)$. On a :*

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \operatorname{sing\,supp}(Au) \subseteq \operatorname{sing\,supp}(u) \subseteq \operatorname{sing\,supp}(Au) \cup \pi(\mathrm{Char}(A))$$

en particulier, si A est elliptique sur Ω (i.e. $\mathrm{Char}(A) = \emptyset$) alors $\operatorname{sing\,supp}(Au) = \operatorname{sing\,supp}(u)$.

Définition 9.19. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le front d'ondre H^s de u, noté $\mathrm{WF}_s(u)$, est défini par :

$$\mathrm{WF}_s(u)^c := \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \exists \omega \text{ voisinage de } (x,\xi), \forall A \in \psi^0_{\mathrm{ps}}(\Omega),\ \operatorname{essupp}(A) \subseteq \omega \implies Au \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)\}$$

(complémentaire dans $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$).

Remarque 9.20. Si $u \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ alors $\forall A \in \psi^0_{\mathrm{ps}}(\Omega), Au \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et donc $\mathrm{WF}_s(u) = \emptyset$.

Théorème 9.21. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $s, m \in \mathbb{R}$ et $A \in \psi^m_{\mathrm{ps}}(\mathbb{R}^n)$. On a :*

$$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \mathrm{WF}_s(Au) \subseteq \mathrm{WF}_{s+m}(u) \subseteq \mathrm{WF}_s(Au) \cup \mathrm{Char}(A)$$

Exemple 9.22. Si u est solution de $Au = f \in \mathrm{H}^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *i.e.* $\mathrm{WF}_s(f) = \emptyset$ alors $\mathrm{WF}_{s+m}(u)$ (singularités H^{s+m} de u) $\subseteq \mathrm{Char}(A)$.

10 Propagation des singularités

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$, $P \in \psi_{\mathrm{ps}}^m(\Omega)$ de symbole $p(x,\xi) = p_m(x,\xi)\omega(\xi) + p_{m-1}(x, xi$ où p_m est positivement homogène de degré m régulier, $p_{m-1} \in \mathcal{S}_{\mathrm{loc}}^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et $\omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\begin{cases} \omega = 0 & \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ \omega = 1 & \text{si } |\xi| \geq 1 \end{cases}$. On dit que p_m est le *symbole principal* de P.

Théorème 10.1. *On garde les notations précédentes. Soient* $t_0 < t_1$ *des réels et* $\left| \begin{array}{ccc} I = [t_0, t_1] & \to & \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ t & \mapsto & \gamma(t) \end{array} \right.$ *une courbe bicaractéristique de symbole* $\mathrm{Re}_{,} p_m$*, i.e.* $\forall t \in I, \begin{cases} \gamma'(t) = \mathrm{H}_{\mathrm{Re}\, p_m}(\gamma(t)) \\ \mathrm{Re}\, p_m(\gamma(t)) = 0 \end{cases}$ *où* $\mathrm{H}_{\mathrm{Re}\, p_m} = \frac{\partial \mathrm{Re}\, p_m}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{Re}\, p_m}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}$*. Supposons que* $\mathrm{im}\, p_m \geq 0$ *dans un voisinage conique de* $\gamma(I)$*. Soient* $s \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *tels que* $Pu \in \mathrm{H}^s$ *sur* $\gamma(I)$ *i.e.* $\mathrm{WF}_s(Pu) \cap \gamma(I) = \emptyset$*. Alors :*

$$\gamma(t_0) \in \mathrm{WF}_{s+m-1}(u) \implies \gamma(t_1) \in \mathrm{WF}_{s+m-1}(u)$$

Remarque 10.2. Les singularités se propagent le long des courbes intégrales (et la régularité se propage dans l'autre sens).

Références

[1] André Martinez, *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*

[2] (Bible.) Lars Hörnander, *The analysis of linear partial differential equations*, vol. 3, chap. 18.1, 4 ;6.

[3] Serge Alinhac & Patrick Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash–Moser.*

[4] Nicolas Lerner, *Metrics on the phase space and non-selfadjoint operators.*