

Anneaux et arithmétique (ANAR)

TD 2 : Idéaux

Salim Rostam

1 Énoncés généraux

Exercice 1. Soit A un anneau et I un idéal à gauche de A .

- 1) Montrer que I est un sous-anneau de A .
- 2) Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose A unitaire ?

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif et I, J, K trois idéaux.

- 1) Montrer que le produit d'idéaux est associatif : $(IJ)K = I(JK)$.
- 2) A-t-on la relation de distributivité $I(J + K) = IJ + IK$?

Exercice 3 (Anneaux locaux). Soit A un anneau commutatif unitaire. On dit que A est *local* si A possède un unique idéal maximal.

- 1) Montrer que A est local si et seulement si $A \setminus A^\times$ est un idéal de A . Cet idéal est-il maximal ?
- 2) Montrer qu'un corps est un anneau local.
- 3) L'anneau \mathbb{Z} est-il local ?

Si p est un nombre premier, on considère $\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, \text{pgcd}(a, b) = 1, p \nmid b \right\}$.

- 4) Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de \mathbb{Q} .
- 5) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$ est local et expliciter l'idéal maximal.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif unitaire.

- 1) Montrer que A est un corps si et seulement si A ne possède pas d'idéal propre non trivial.
- 2) Montrer que si tous les idéaux propres de A sont premiers alors A est un corps.
Indication : construire un idéal (premier) à partir d'un élément $a \in A \setminus \{0\}$.
- 3) On suppose A intègre. Montrer que si A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux alors A est un corps. *Indication* : on peut pousser plus loin la construction précédente.

Exercice 5 (Radical). Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A . Le radical de I est l'ensemble $\sqrt{I} := \{a \in A : a^n \in I \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}\}$.

- 1) Montrer que $I \subseteq \sqrt{I}$.

- 2) Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A .
- 3) Montrer que si \mathfrak{p} est un idéal premier contenant I alors $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{I}$.
- 4) Montrer que si \mathfrak{p} est premier alors $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.
- 5) Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
- 6) Si J est un autre idéal de A , montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
- 7) Déterminer le radical d'un idéal de \mathbb{Z} .

Soit $V \subseteq \mathbb{R}$ avec $\#V \geq 2$ et soit $\mathcal{I}(V) := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in V\}$.

- 8) Montrer que $\mathcal{I}(V)$ est un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- 9) L'idéal $\mathcal{I}(V)$ est-il premier ?
- 10) Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}(V)} = \mathcal{I}(V)$.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif. Quand l'idéal (0) est-il premier ? Maximal ?

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif.

- 1) Soit k un corps. Soit $f : A \rightarrow k$ un morphisme d'anneaux surjectif. Montrer que $\ker f$ est un idéal maximal de A .
- 2) Soit B un anneau intègre. Soit $g : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux non nul. Montrer que $\ker g$ est un idéal premier de A .

Exercice 8 (Nil-radical). Soit A un anneau commutatif. Le *nil-radical* de A est l'ensemble $\text{Nil}(A)$ de ses éléments nilpotents (en comptant 0_A).

- 1) Montrer que $\text{Nil}(A)$ est un idéal de A .
- 2) Montrer que $\text{Nil}(A) = \sqrt{(0)}$ (avec la notation de l'Exercice 5).
- 3) Montrer que si \mathfrak{p} est un idéal premier de A alors $\text{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}$.
- 4) Montrer que $\text{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Sp}(A)} \mathfrak{p}$. *Indication* : pour $x \notin \text{Nil}(A)$, considérer l'ensemble des idéaux de A qui ne rencontrent pas l'ensemble $\{x^n : n \geq 1\}$ et utiliser le lemme de Zorn.
- 5) Déterminer le nil-radical de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de \mathbb{Z} .

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif.

- 1) Soit $a \in A$ un idempotent. Montrer que aA est un anneau unitaire, d'identité a .

On suppose maintenant A unitaire.

- 2) Montrer que $b := 1_A - a$ est idempotent.
- 3) Montrer l'isomorphisme d'anneaux unitaires $A \simeq (aA) \times (bA)$.

Exercice 10. Soit A un anneau commutatif unitaire et B un sous-anneau. Le *conducteur* C de B dans A est l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $aA \subseteq B$.

- 1) Montrer que C est un idéal de A .
- 2) Montrer que C est également un idéal de B .

3) Si $I \subseteq B$ est un idéal de A , montrer que $I \subseteq C$.

Exercice 11. Soient A, B deux anneaux unitaires.

- 1) Soit I un idéal de A et J un idéal de B . Montrer que $I \times J$ est un idéal de $A \times B$.
- 2) Décrire l'ensemble des idéaux de $A \times B$ en fonction de ceux de A et B .
- 3) Soit \mathfrak{p} un idéal premier de A . Montrer que $\mathfrak{p} \times B$ est un idéal premier de $A \times B$.
- 4) Même question qu'en 2) avec les idéaux premiers.
- 5) On suppose maintenant que A et B sont des corps. Déterminer les idéaux, les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $A \times B$.

2 Cas particuliers

Exercice 12. Trouver un anneau commutatif A et deux idéaux I, J tels que $I \cup J$ n'est pas un idéal de A . Quel est le plus petit idéal de A qui contient $I \cup J$?

Exercice 13. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $I_x := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cas particulier de l'idéal $\mathcal{I}(V)$ rencontré dans l'Exercice 5).
Indication : on pourra montrer que tout idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 14. Soient k un corps et $x, y \in k$.

- 1) Montrer que $(X - x)$ est un idéal maximal de $k[X]$.
- 2) Montrer que $(X - x, Y - y)$ est un idéal maximal de $k[X, Y]$. *Remarque* : quand k est algébriquement clos, on peut prouver la réciproque, qui constitue une forme faible du « théorème des zéros de Hilbert » (« Nullstellensatz »).

Exercice 15. Soit k un corps.

- 1) Montrer que tout idéal bilatère propre de $M_n(k)$ est trivial.
- 2) Expliciter les idéaux à droite et à gauche engendrés par une matrice élémentaire E_{ij} .

Soit maintenant A un anneau.

- 3) Soit I un idéal bilatère de A . Montrer que $M_n(I)$ est un idéal bilatère de $M_n(A)$.
- 4) Montrer que tout idéal bilatère de $M_n(A)$ est de la forme précédente.
- 5) Montrer que l'application correspondante $I \mapsto M_n(I)$ est une bijection.

Exercice 16. Soit T l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_2(\mathbb{Z})$.

- 1) Montrer que T est un sous-anneau de $M_2(\mathbb{Z})$.
- 2) T est-il un idéal de $M_2(\mathbb{Z})$?
- 3) Déterminer les idéaux de T .

Exercice 17 (Théorème des deux carrés). On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ des entiers de Gauss.

- 1) Vérifier que c'est bien un sous-anneau de \mathbb{C} .
- 2) Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$ on pose $N(z) := z\bar{z}$.
 - a) Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, expliciter $N(a + ib)$.
 - b) En déduire que si I est un idéal non nul de $\mathbb{Z}[i]$ alors $I \cap \mathbb{Z}^* \neq \emptyset$.
 - c) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$.
 - d) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que si $N(z)$ est un nombre premier alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

On se donne maintenant un nombre premier p impair. On veut donner une condition nécessaire et suffisante pour que p soit somme de deux carrés, c'est-à-dire, qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2$.

- 3) Montrer que p est somme de deux carrés si et seulement si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. *Indication* : utiliser N .
- 4) Montrer que si p est somme de deux carrés alors $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- 5) Montrer que $p \equiv 1 \pmod{4}$ si et seulement si -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Indication* : on pourra considérer l'application $x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et montrer que $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré ssi $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
- 6) Montrer que si -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ alors $(p) = p\mathbb{Z}[i]$ n'est pas un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$.
- 7) On admet (pour l'instant) que (p) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Conclure.