Anneaux et arithmétique (ANAR)
TD 1 : Anneaux, algèbres, corps

Salim Rostam

1 Anneaux

1.1 Résultats généraux

Exercice 1 (Règle des signes)**.** Soit A un anneau unitaire et soient $a, b \in A$.

1) Montrer que $0_A a = a 0_A = 0_A$.
2) Montrer que $(-1_A)a = a(-1_A) = -a$.
3) Montrer que $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ et $(-a)(-b) = ab$.

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire muni d'une relation d'ordre totale $\geq$. On suppose que cette relation est compatible avec les opérations de A, c'est-à-dire :

— si $a \geq b$ alors $a + c \geq b + c$;

— si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $ab \geq 0$

(on dit que A est *totalement ordonné*). Montrer que l'équation $x^2 + 1_A = 0_A$ n'a pas de solution dans A.

Exercice 3. Soit A un ensemble muni de deux lois qui vérifient les axiomes des lois d'anneau unitaire, excepté l'axiome de commutativité pour l'addition. Monter que cet axiome est en fait automatiquement vérifié.

Exercice 4. Soit A un anneau unitaire.

1) Soit $a \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1_A + a$ est inversible et donner son inverse.
2) Soient $a, b \in A$ tels que $1_A - ab \in A^\times$. Montrer que $1_A - ba \in A^\times$. *Indication* : on pourra reprendre (au brouillon !) la question précédente.

Exercice 5. Soit A un anneau et soient $a, b \in A$ nilpotents qui commutent. Montrer que ab et $a + b$ sont nilpotents.

Exercice 6 (Anneau de Boole)**.** Soit A un anneau tel que tout élément de A est idempotent, c'est-à-dire $a^2 = a$ pour tout $a \in A$.

1) Montrer que $2a = 0_A$ pour tout $a \in A$.
2) Montrer que A est commutatif.

3) a) Montrer que $ab(a+b) = 0_A$ pour tout $a, b \in A$.
   b) En déduire que si A possède plus de deux éléments il n'est pas intègre.
   c) Donner un exemple avec A de cardinal 2. Existe-t-il un tel A de cardinal 3 ?

Exercice 7. Soit A un anneau unitaire intègre fini. Montrer que tout élément non nul de A est inversible.

Exercice 8. Soit A un anneau unitaire et soit $a \in A$ possédant un inverse à droite. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) a possède au moins deux inverses à droites ;

(ii) a n'est pas inversible ;

(iii) a est un diviseur de zéro à gauche.

Exercice 9 (Un résultat de Kaplansky)**.** Soit A un anneau unitaire. Montrer que si $a \in A \setminus A^\times$ possède un inverse à droite alors a possède une infinité d'inverses à droite. *Indication* : si b est un inverse à droite de a, on pourra considérer les éléments $b + (1_A - ba)a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Soit A un anneau de caractéristique p premier. Monter que si $a \in A$ est nilpotent alors $1_A + a$ possède une puissance égale à 1_A.

Exercice 11 (Morphismes)**.** Soient A, B deux anneaux. Déterminer si les applications suivantes sont des morphismes (d'anneaux).

1) $A \to A \times B, a \mapsto (a, 0_B)$
2) $A \to A \times A, a \mapsto (a, a)$
3) $A \times B \to A, (a, b) \mapsto a$
4) $A \times A \to A, (a, a') \mapsto aa'$
5) $A \times A \to A, (a, a') \mapsto a + a'$.

1.2 Cas particuliers

Exercice 12 (Sous-anneau)**.** Soit A un anneau. Dans chaque cas, déterminer si le sous-ensemble B est un sous-anneau de A.

1) $A = \mathbb{Q}$ et $B = \{\frac{a}{b} : 3 \nmid b\}$.
2) $A = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et B est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par la fonction constante et les $x \mapsto \cos nx$ et $x \mapsto \sin nx$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3) $A = \mathrm{M}_2(k)$ et $B \coloneqq \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) : a, b \in k\right\}$ avec k un corps.

Exercice 13 (Lois)**.** Dans chaque cas, déterminer si les lois données sur l'ensemble A font de A un anneau. Si ça n'est pas le cas, préciser quels axiomes ne sont pas vérifiés.

1) Étant donné un ensemble E, on prend $A \coloneqq \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. L'addition sur A est l'union et la multiplication est l'intersection.

2) Étant donné un ensemble E, on prend $A := \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. L'addition sur A est la différence symétrique (si $F, G \subseteq E$, leur différence symétrique est $F \Delta G := (F \cup G) \setminus (F \cap G)$) et la multiplication est l'intersection.

Exercice 14. Soient X et Y deux ensembles. On considère un sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$ des fonctions de X dans Y. Donner des conditions naturelles sur X, Y et trouver A le plus grand possible pour que :

1) $(A, +, \times)$ soit un anneau ;
2) $(A, +, \circ)$ soit un anneau.

Exercice 15. On considère l'anneau $A := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (muni des lois d'addition et de multiplication point par point). Déterminer les idempotents, les nilpotents et les inversibles de A.

Exercice 16. Soit A un anneau unitaire et soient $a_1, \ldots, a_n \in A$. Montrer que la matrice diagonale $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{M}_n(A)$ est inversible ssi $a_i \in A^\times$ pour tout i. Dans ce cas, quel est l'inverse ?

Exercice 17. Soit A un anneau. Montrer que les anneaux $\mathrm{M}_{mn}(A)$ et $\mathrm{M}_m(\mathrm{M}_n(A))$ sont isomorphes.

2 Algèbres et corps

Exercice 18. Soit G un groupe fini et k un corps. On considère l'espace vectoriel kG de base les éléments $g \in G$. On munit kG de la multiplication donnée de façon naturelle sur les éléments de la base par $g \times g' := gg' \in G$.

1) Montrer que kG est une k-algèbre. C'est *l'algèbre du groupe G*.

On considère l'application linéaire $T : kG \to k$ qui vaut 1 sur chaque élément de la base précédente.

2) Expliciter T pour un élément quelconque de kG.
3) Montrer que T est un morphisme de k-algèbres.
4) On suppose maintenant que G est un p-groupe (c'est-à-dire $\#G$ est une puissance de p) et que k est de caractéristique p. Montrer que tout élément de $\ker T$ est nilpotent.

Exercice 19. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On définit la loi de composition interne $\star$ par $a \star b := a + b - ab$ pour $a, b \in A$.

1) Montrer que $\star$ est associative et possède un élément neutre.

On suppose maintenant que A possède la propriété suivante : il existe un unique élément $e \in A$ tel que $e \star x \neq 0$ pour tout $x \in A$.

2) Montrer que $e \neq 0$.
3) Montrer que $e \star x = e$ pour tout $x \in A$.

4) Montrer que $x \star e \neq 0$ et $x \star e = e$ pour tout $x \in A$.

5) Montrer que $(A, +, \times)$ est un corps.

Exercice 20 (Produits tensoriels)**.** Soit k un corps et soient A et B deux k-algèbres. Montrer que $A \otimes B$ possède une structure naturelle de k-algèbre.

Exercice 21. (Cet exercice sera à refaire à la lumière de la notion de quotient.) Soit k un corps et soit K l'espace vectoriel k^2. On considère l'addition sur K (provenant de la structure d'espace vectoriel), et la multiplication donnée par

$$(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \coloneqq (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

1) Reconnaître cette loi lorsque $k = \mathbb{R}$.

2) Montrer que K muni de ces lois est un anneau commutatif unitaire.

3) Montrer que K est un corps si et seulement si -1 n'est pas un carré dans k.

4) On suppose que -1 est un carré dans k et que k est de caractéristique impaire. Montrer que K est isomorphe à l'anneau k^2.

Exercice 22. On considère $A \coloneqq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

1) Montrer que pour tout $a \in A$, il existe $x, y \in \mathbb{Q}$ tel que $a = x + y\sqrt{2}$.

2) Montrer que A est un corps.

Exercice 23 (Quaternions)**.** Soit $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4 comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de base $1, i, j, k$ avec comme multiplication déterminée par

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

On dit que $\mathbb{H}$ est l'algèbre des *quaternions*.

1) Montrer que $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$.

2) L'algèbre $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?

On définit le *conjugué* d'un quaternion $q = a + bi + cj + dk$ par $\bar{q} \coloneqq a - bi - cj - dk$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

3) Montrer que $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

4) En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.

5) Montrer qu'il existe une infinité de $q \in \mathbb{H}$ tels que $q^2 = -1$.

Exercice 24. Soit k un corps. Montrer que les matrices $A \coloneqq \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ et $B \coloneqq \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}$ engendrent la k-algèbre $\mathrm{M}_n(k)$ des matrices carrées de taille n sur k.