Anneaux et arithmétique (ANAR)
TD 5 : Localisation

Salim Rostam

2021–2022 (S6)

1 Corps des fractions

Exercice 1. Soit k un corps.

1) Rappeler pourquoi $k[[X]]$ est intègre.
2) Montrer que $\operatorname{Frac} k[[X]]$ peut s'identifier au corps $k((X))$ des séries de la forme $\sum_{n\geq n_0} a_n X^n$ pour $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in k$.
3) Montrer que $k((X)) = k[[X]]_X$. A-t-on $k(X) = k[X]_X$?

Exercice 2. Soit k un corps. Les corps $k(X)(Y)$ et $k(Y)(X)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 3 (Corps des fractions des séries formelles multivariées)**.** Soit k un corps. On considère l'élément $F \coloneqq (X-Y)^{-1} \in k(X,Y)$.

1) Justifier que $k((X,Y)) \subseteq k((X))((Y))$ et écrire $(X-Y)^{-1}$ comme un élément de $k((X))((Y))$.
2) Justifier que $k((X,Y)) \subseteq k((Y))((X))$ et écrire $(X-Y)^{-1}$ comme un élément de $k((Y))((X))$.
3) Que peut-on en conclure ?

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif unitaire intègre. Montrer que $\operatorname{Frac}(A[X])$ et $\operatorname{Frac}(A)(X)$ sont canoniquement isomorphes.

Exercice 5 (Corps des fractions de séries formelles)**.** Soit A un anneau commutatif unitaire intègre.

1) Montrer que $\operatorname{Frac}(A[[X]]) \subseteq \operatorname{Frac}(A)((X))$.
2) Si $F \in \operatorname{Frac}(A[[X]])$, montrer qu'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $X^n F \in A[a^{-1}][[X]]$. *Indication* : commencer par le cas $F = \frac{1}{G}$ avec $G \in A[[X]]$.
3)
   a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} X^n \in \operatorname{Frac}(\mathbb{Z}[[X]])$.
   b) Montrer que $\operatorname{Frac}(\mathbb{Z}[[X]]) \subsetneq \mathbb{Q}((X))$.

On va maintenant améliorer le critère précédent.

4) Si $F \in \operatorname{Frac}(A[[X]])$, montrer qu'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $aX^n F \in A[[a^{-1}X]]$. *Indication* : commencer par le cas $F = \frac{1}{G}$ avec $G \in A[[X]]$.

5) On suppose que A est muni d'une valuation $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$ (cette valuation s'étend en une valuation $v : \mathrm{Frac}(A)^* \to \mathbb{R}$). En déduire qu'un élément $F \in \mathrm{Frac}\big(A[[X]]\big)$ est de la forme $\sum_{n \geq n_0} a_n X^n$ avec $\inf_{n\geq 1} \frac{v(a_n)}{n} > -\infty$.
6) Soit p un nombre premier. Montrer que $\sum_{n\geq 0} p^{-n^2} X^n \in \mathbb{Q}[[X]]$ n'est pas dans $\mathrm{Frac}\big(\mathbb{Z}[[X]]\big)$.
7) Si k est un corps, montrer que $\mathrm{Frac}\big(k[[X]][[Y]]\big) \subsetneq k((X))((Y))$.

2 Localisation

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative.

1) Montrer que si $S \subseteq A^\times$ alors $S^{-1}A$ est naturellement isomorphe à A.
2) On suppose que $0_A \notin S$. Montrer que si A est intègre alors $S^{-1}A$ l'est également.
3) On rappelle qu'un anneau est *réduit* s'il ne possède pas d'élément nilpotent non nul. Montrer que si A est réduit alors $S^{-1}A$ l'est également.

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif unitaire et soient $a, b \in A$.

1) Rappeler pourquoi $A_a \simeq \{0\}$ si et seulement si a est nilpotent dans A.
2) Montrer que ab est nilpotent dans A si et seulement si b est nilpotent dans A_a.
3) Montrer que $\left(A_a\right)_b \simeq A_{ab}$ et déterminer la règle de calcul correspondante.

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif unitaire et soit $a \in A$. Montrer que $A_a \simeq A[X]/(aX-1)$.

Exercice 9. Écrire comme un localisé l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux (réels avec « une écriture à virgule finie »).

Exercice 10 (Idéaux du localisé)**.** Soit A un anneau commutatif unitaire et soit S une partie multiplicative de A.

1) Soit I un idéal de A. On note $S^{-1}I$ l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par l'image de I via le morphisme canonique $A \to S^{-1}A$. (Remarquons que $S^{-1}I$ *n' est pas* la localisation de I par S puisque à priori $S \nsubseteq I$.)
   a) Montrer que $S^{-1}I = \{\frac{i}{s} : i \in I, s \in S\}$.
   b) Montrer que $S^{-1}I = S^{-1}A$ si et seulement si $S \cap I \neq \emptyset$.
   c) Montrer que si $I' \supseteq I$ est un idéal de A alors $S^{-1}I' \supseteq S^{-1}I$.
2) Soit J un idéal de $S^{-1}A$.
   a) Montrer que $J_S \coloneqq \{a \in A : \text{il existe } s \in S \text{ tel que } \frac{a}{s} \in J\}$ est un idéal de A.
   b) Montrer que $S^{-1}J_S = J$.
3) Conclure quand aux idéaux de $S^{-1}A$.
4) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.
   a) Montrer que $S^{-1}\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $S^{-1}A$.
   b) Montrer que $(S^{-1}\mathfrak{p})_S = \mathfrak{p}$.
5) Si $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $S^{-1}A$, montrer que $\mathfrak{P}_S$ est un idéal premier de A.
6) Conclure quand aux idéaux premiers de $S^{-1}A$.

Exercice 11 (Localisé et quotient commutent)**.** Soit A un anneau commutatif, soit I un idéal de A et S une partie multiplicative tel que $I \cap S = \emptyset$. Soit $\pi : A \to A/I$ la surjection canonique.

1) Montrer que $\pi(S)$ est une partie multiplicative de A/I. Pourquoi a-t-on fait l'hypothèse $I \cap S = \emptyset$?
2) Montrer que $\pi(S)^{-1}(A/I)$ est canoniquement isomorphe à $S^{-1}A/S^{-1}I$ (avec la notation $S^{-1}I$ de l'Exercice 10).

Exercice 12 (Anneau total des fractions)**.** Soit A un anneau commutatif unitaire.

1) Montrer que l'ensemble D_A des éléments de A qui ne sont pas diviseurs de zéro est une partie multiplicative.

Le localisé $Q(A) := D_A^{-1}A$ est l'*anneau total des fractions* de A.

2) Montrer que l'anneau A s'injecte naturellement dans $Q(A)$.
3) Si A est intègre, montrer que $Q(A) = \operatorname{Frac} A$.
4) Déterminer $Q(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 13. Identifier l'anneau $S^{-1}A$ dans les cas suivants, ou k désigne un corps.

1) $A = \mathbb{Z}$ et $S = \{-1, 1\}$.
2) $A = \mathbb{Z}^2$ et $S = \{0\} \times \mathbb{Z}^* \cup \{(1, 1)\}$.
3) $A = \mathbb{Z}^2$ et $S = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$.
4) $A = \mathbb{Z}^2$ et $S = \mathbb{Z}^{*2}$.
5) $A = k[X]/(X^6)$ et $S = \{X^n : n \geq 0\}$.
6) $A = k[X, Y]/(X^6Y)$ et $S = \{X^n : n \geq 0\}$.
7) $A = k[X, Y]/(X^6Y)$ et $S = \{P \in A : P \notin (X)\}$.
8) $A = k[X, Y]/(X^6Y)$ et $S = \{P \in A : P \notin (Y)\}$.
9) $A = k[X, Y]/(XY)$ et $S = \{(X + Y)^n : n \geq 0\}$.

Exercice 14. Soit A un sous-anneau unitaire de $\mathbb{Q}$.

1) Montrer que $\mathbb{Z} \subseteq A$.
2) Monter que si $\frac{a}{b} \in A$ avec $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ alors $\frac{1}{b} \in A$.
3) Montrer qu'il existe une partie multiplicative S de $\mathbb{Z}$ telle que $A = S^{-1}\mathbb{Z}$.

3 Localisation par un idéal premier

Exercice 15 (Exemples d'anneaux locaux)**.** Soit A un anneau commutatif unitaire et soit $\mathfrak{p}$ un idéal de A.

1) Monter que $A \setminus \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative de A si et seulement si $\mathfrak{p}$ est premier.

On suppose maintenant que $\mathfrak{p}$ est premier et on considère le localisé $A_{\mathfrak{p}}$ de A par rapport à $A \setminus \mathfrak{p}$.

2) Montrer que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local.
3) Montrer que le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$ (c'est-à-dire $A_{\mathfrak{p}}$ quotienté par son idéal maximal) est isomorphe à $\operatorname{Frac} A/\mathfrak{p}$.

4) Soit p un nombre premier. Identifier l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$ et déterminer son corps résiduel.

5) Identifier $A_{\mathfrak{p}}$ et son corps résiduel quand $A = k[X]$ avec k un corps et $\mathfrak{p} = (X)$.

Exercice 16. Soit A un anneau commutatif unitaire.

1) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A.
   a) Préciser le résultat de l'Exercice 10 pour la partie multiplicative $S = A \setminus \mathfrak{p}$.
   b) Retrouver ainsi le résultat de l'Exercice 15 disant que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local.
2) Soit $x \in A$ non nilpotent. Toujours en utilisant le résultat de l'Exercice 10, retrouver le fait qu'il existe un idéal premier de A ne contenant pas x (utilisé dans le TD 2 via le lemme de Zorn dans la démonstration du fait que $\operatorname{Nil} A = \cap \mathfrak{p}$).

Exercice 17. Soit A un anneau commutatif unitaire et S une partie multiplicative de A. Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un élément maximal de l'ensemble des idéaux de A qui ne rencontrent pas S alors $\mathfrak{p}$ est premier. *Indication* : on pourra utiliser les résultats de l'Exercice 10.

Exercice 18 (Germes des fonctions continues)**.** On munit l'anneau $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la relation d'équivalence $\sim$ donnée par $f \sim g$ s'il existe $r > 0$ tel que f et g coïncident sur $[-r, r]$.

1) L'anneau $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ est-il intègre ? Quels sont ses inversibles ?
2) Montrer que $\sim$ est compatible avec les lois d'anneau de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
3) Montrer que l'anneau quotient $\mathcal{G}_0 \coloneqq \mathcal{C}(\mathbb{R})/\!\sim$ est isomorphe au localisé de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ par rapport à l'idéal maximal $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.

Exercice 19. Soit A un anneau commutatif unitaire intègre.

1) Montrer que $\operatorname{Frac} A = \cup_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A} A_{\mathfrak{m}}$ et $A = \cap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A} A_{\mathfrak{m}}$. *Indication* : pour l'intersection, on pourra considérer le *conducteur* $(A : x) \coloneqq \{a \in A : ax \in A\}$ d'un élément $x \in \operatorname{Frac} A$ dans A.
2) Montrer que $\operatorname{Frac} A = \cup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A} A_{\mathfrak{p}}$ et $A = \cap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A} A_{\mathfrak{p}}$.

Exercice 20. On rappelle qu'un anneau est dit *réduit* si 0 est le seul élément nilpotent. Montrer qu'un anneau commutatif unitaire A est réduit si et seulement si $A_{\mathfrak{m}}$ est réduit pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$. *Indication* : on pourra considérer l'idéal $(0 : x) \coloneqq \{a \in A : ax = 0_A\}$.

Exercice 21. Soit $n \geq 2$.

1) Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2) Déterminer les localisés $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier. *Indication* : si $\frac{\kappa}{\lambda}$ est dans le localisé, dans quel anneau naturel (un antécédent dans $\mathbb{Z}$ de) λ est-il inversible ?
3) En déduire que l'application naturelle
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathfrak{p}},$$
   est un isomorphisme d'anneaux.
4) Un tel isomorphisme est-il vérifié pour l'anneau $\mathbb{Z}$?