Anneaux et arithmétique (ANAR)
TD 4 : Quotient

Salim Rostam

2021–2022 (S6)

1 De nouvelles démonstrations

Exercice 1. Soit k un corps. On considère l'anneau $A := k[X]/(X^2+1)$.

1) L'anneau A est-il unitaire ?
2) À quel anneau usuel est isomorphe A lorsque $k = \mathbb{R}$?
3) Montrer que A est un corps si et seulement si X^2+1 est irréductible sur k.
4) On suppose que X^2+1 possède une racine dans k et que k est de caractéristique impaire. Montrer que A est isomorphe à l'anneau k^2.

Exercice 2 (Théorème de Krull)**.** On rappelle la version suivante du théorème de Krull : tout anneau commutatif unitaire possède un idéal maximal. En déduire que si A est un anneau commutatif unitaire et si I est un idéal de A alors A possède un idéal maximal qui contient I.

Exercice 3 (Radical)**.** Soit A un anneau commutatif. On rappelle que si I est un idéal de A alors $\sqrt{I} = \{a \in A : \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a^n \in I\} \supseteq I$ est un idéal. On a vu que :

— l'ensemble des éléments nilpotents de A (incluant 0) est $\operatorname{Nil} A := \sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A} \mathfrak{p}$;

— si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A$ est un idéal premier de A contenant I alors $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{I}$.

1) Montrer que $\operatorname{Nil}\big(A/\operatorname{Nil}(A)\big) = (0)$.
2) Montrer que $\operatorname{Nil} A = (0)$ si et seulement si A s'injecte dans un produit d'anneaux intègres.
3) Soit I un idéal de A.
   a) Montrer que $\pi\big(\sqrt{I}\big) = \operatorname{Nil}(A/I)$ où $\pi : A \to A/I$ est la surjection canonique. En déduire que $\operatorname{Nil}(A/I) = (0)$ si et seulement si $I = \sqrt{I}$.

b) En déduire que $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sp} A \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p}$.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $I_x \coloneqq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 5. Soient k un corps, $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \in k$. Montrer que $(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$ est un idéal maximal de $k[X_1, \dots, X_n]$.

Exercice 6. Soit k un corps et soit $d \mid n \geq 1$. Montrer que $X^d - 1$ divise $X^n - 1$ dans $k[X]$.

Exercice 7. Soit A commutatif intègre unitaire. Montrer que (X) est un idéal premier de $A[X, Y]$.

2 Quotients

Exercice 8 (Radical de Jacobson)**.** Le *radical de Jacobson* $J(A)$ d'un anneau commutatif unitaire A est l'intersection de ses idéaux maximaux.

1) Montrer que $J\big(A/J(A)\big) = (0)$.
2) Plus généralement, si I est un idéal contenu dans $J(A)$, montrer que $J(A/I) = J(A)/I$.
3) Montrer que $\operatorname{Nil} A \subseteq J(A)$ (notation Nil de l'Exercice 3).

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Lesquels sont premiers, maximaux ?

Exercice 10 (Entiers de Gauss)**.** Soit $A \coloneqq \mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$.

1) Rappeler pourquoi $A \neq \{0\}$.
2) Montrer que $i = 3$ dans A.
3) Montrer que $10 = 0$ dans A.
4) Montrer que $A \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 11.

1) Déterminer le noyau du morphisme d'anneau unitaire $\mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}[X]$ donné par $P \mapsto P(X, 0)$.
2) Montrer que $\mathbb{C}[X, Y]/(XY)$ est naturellement isomorphe au sous-anneau de $\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[Y]$ formé des couples (P, Q) tels que $P(0) = Q(0)$.

Exercice 12.

1) Monter que $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ est un corps. Combien a-t-il d'éléments ?
2) L'anneau $\mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X + 1)$ est-il un corps ?

3) Montrer que $\mathbb{Q}[X]/(X^2+X+1)$ est un corps et déterminer l'inverse de x^3-x+1, où x est l'image de X.

Exercice 13. Soit A un anneau commutatif, soit I un idéal de A et soit $n \geq 1$.

1) Montrer que $\mathrm{M}_n(A)/\mathrm{M}_n(I) \simeq \mathrm{M}_n(A/I)$.
2) a) Montrer que $I[X_1, \ldots, X_n]$ est un idéal de $A[X_1 \ldots, X_n]$.
   b) Montrer que $A[X_1, \ldots, X_n]/I[X_1, \ldots, X_n] \simeq (A/I)[X_1, \ldots, X_n]$.

Exercice 14. Soient A, B des anneaux commutatifs et soit $f : A \to B$ un morphisme surjectif. Soit J un idéal de B et $I \coloneqq f^{-1}(J)$.

1) Rappeler pourquoi I est un idéal de A.
2) Montrer que $A/I \simeq B/J$.

Exercice 15. Soit k un corps. Décrire les idéaux de $k[X]/(X^4 + 3X^3 + 2X^2)$.

Exercice 16. Résoudre les systèmes suivants, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

1) $\begin{cases} x = 1 \pmod 4 \\ x = 2 \pmod 5 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x = 1 \pmod{10} \\ x = 5 \pmod{15} \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x = 1 \pmod{25} \\ x = 5 \pmod{13} \end{cases}$

Exercice 17. 1) Soit $n \in \mathbb{Z}$.

   a) L'idéal (n, X) est il un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$? Maximal ?
   b) Même question avec l'idéal (n) de $\mathbb{Z}[X]$.

2) On considère les idéaux suivants de $\mathbb{Z}[X, Y]$:

$$(X, Y), \qquad (2X), \qquad (X, Y, 2), \qquad (2X, Y, 2).$$

Sont-ils premiers, maximaux ?

3 Théorie des corps

Exercice 18 (Extensions de corps)**.** Soit k un corps et soit $P \in k[X]$ non constant.

1) On suppose que P est irréductible.
   a) Montrer que (P) est un idéal maximal de $k[X]$.

b) En déduire un morphisme injectif de corps $k \hookrightarrow K := k[X]/(P)$ (on parle d'*extension de corps* et on note K/k).

c) Montrer que le polynôme P admet une racine dans K. *Le corps K est un* corps de rupture *de P sur k.*

2) Montrer que tout polynôme non constant de $k[X]$ peut s'écrire comme un produit de polynômes irréductibles.

3) En déduire qu'il existe une extension de corps K/k telle que P possède une racine dans K.

4) En déduire qu'il existe une extension de corps K/k telle que P est scindé sur K. *Un tel corps « minimal » est appelé* corps de décomposition *de P sur k.*

Exercice 19 (Théorème de Steinitz)**.** Soit k un corps. On veut montrer que k possède une extension Ω algébriquement close, c'est-à-dire, un sur-corps tel que tout polynôme non constant à coefficient dans Ω est scindé.

1) Montrer qu'il suffit de trouver Ω tel que tout polynôme non constant à coefficient dans Ω admet une racine.

2) Soit K un corps. On veut montrer qu'il existe une extension de corps L/K telle que tout polynôme non constant à coefficients dans K possède une racine dans L. Pour cela, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes non constants à coefficients dans K. On considère l'anneau de polynômes $A := K[X_f : f \in \mathcal{P}]$ en une infinité d'indéterminées, indexées par $\mathcal{P}$, c'est-à-dire, la réunion des $K[X_{f_1}, \dots, X_{f_n}]$ pour $n \geq 1$ et $f_i \in \mathcal{P}$ (autrement dit, chaque élément de A ne met en jeu qu'un nombre fini d'indéterminées).

   a) Montrer que l'idéal $\big(f(X_f) : f \in \mathcal{P}\big)$ est un idéal strict de A. *Indication* : On pourra utiliser la question 4) de l'Exercice 18.

   b) En déduire l'existence d'une extension de corps L/K comme recherchée.

3) En déduire que l'on peut construire une tour de corps $\Omega_0 := k \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \dots$ telle que tout polynôme non constant à coefficient dans Ω_i possède une racine dans Ω_{i+1}.

4) Déterminer un corps algébriquement clos Ω comme recherché.

On peut alors (facilement) montrer que l'ensemble $\overline{k} := \{x \in \Omega :$ il existe $P \in k[X]$ tel que $P(x) = 0\}$ est un corps algébriquement clos : c'est la clôture algébrique *de k dans Ω.*