Anneaux et arithmétique (ANAR)
TD 2 : Idéaux

Salim Rostam

2021–2022 (S6)

1 Énoncés généraux

Exercice 1. Soit A un anneau et I un idéal à gauche de A.

1) Montrer que I est un sous-anneau de A.
2) Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose A unitaire ?

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif et I, J, K trois idéaux.

1) Montrer que le produit d'idéaux est associatif : $(IJ)K = I(JK)$.
2) A-t-on la relation de distributivité $I(J + K) = IJ + IK$?

Exercice 3 (Anneaux locaux)**.** Soit A un anneau commutatif unitaire. On dit que A est *local* si A possède un unique idéal maximal.

1) Montrer que A est local si et seulement si $A \setminus A^\times$ est un idéal de A. Cet idéal est-il maximal ?
2) Monter qu'un corps est un anneau local.
3) L'anneau $\mathbb{Z}$ est-il local ?

Si p est un nombre premier, on considère $\mathbb{Z}_{(p)} \coloneqq \{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, \mathrm{pgcd}(a, b) = 1, p \nmid b\}$.

4) Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
5) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}_{(p)}$ est local et expliciter l'idéal maximal.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif unitaire.

1) Monter que A est un corps si et seulement si A ne possède pas d'idéal propre non trivial.
2) Montrer que si tous les idéaux propres de A sont premiers alors A est un corps. *Indication* : construire un idéal (premier) à partir d'un élément $a \in A \setminus \{0\}$.
3) On suppose A intègre. Montrer que si A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux alors A est un corps. *Indication* : on peut pousser plus loin la construction précédente.

Exercice 5 (Radical)**.** Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. Le radical de I est l'ensemble $\sqrt{I} \coloneqq \{a \in A : a^n \in I \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}\}$.

1) Montrer que $I \subseteq \sqrt{I}$.
2) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
3) Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier contenant I alors $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{I}$.
4) Montrer que si $\mathfrak{p}$ est premier alors $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.
5) Monter que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
6) Si J est un autre idéal de A, montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
7) Déterminer le radical d'un idéal de $\mathbb{Z}$.

Soit $V \subseteq \mathbb{R}$ avec $\#V \geq 2$ et soit et $\mathcal{I}(V) \coloneqq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in V\}$.

8) Montrer que $\mathcal{I}(V)$ est un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
9) L'idéal $\mathcal{I}(V)$ est-il premier ?
10) Montrer que $\sqrt{\mathcal{I}(V)} = \mathcal{I}(V)$.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif. Quand l'idéal (0) est-il premier ? Maximal ?

Exercice 7. Soit A un anneau commutatif.

1) Soit k un corps. Soit $f : A \to k$ un morphisme d'anneaux surjectif. Montrer que $\ker f$ est un idéal maximal de A.
2) Soit B un anneau intègre. Soit $g : A \to B$ un morphisme d'anneaux surjectif. Montrer que $\ker f$ est un idéal premier de A.

Exercice 8 (Nil-radical)**.** Soit A un anneau commutatif. Le *nil-radical* de A est l'ensemble $\mathrm{Nil}(A)$ de ses éléments nilpotents (en comptant 0_A).

1) Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A.
2) Montrer que $\mathrm{Nil}(A) = \sqrt{(0)}$ (avec la notation de l'Exercice 5).
3) Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A alors $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathfrak{p}$.
4) Montrer que $\mathrm{Nil}(A) = \cap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Sp}(A)} \mathfrak{p}$. *Indication* : pour $x \notin \mathrm{Nil}(A)$, considérer l'ensemble des idéaux de A qui ne rencontrent pas l'ensemble $\{x^n : n \geq 1\}$ et utiliser le lemme de Zorn.
5) Déterminer le nil-radical de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}$.

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif.

1) Soit $a \in A$ un idempotent. Montrer que aA est un anneau unitaire, d'identité a.

On suppose maintenant A unitaire.

2) Montrer que $b \coloneqq 1_A - a$ est idempotent.
3) Montrer l'isomorphisme d'anneaux unitaires $A \simeq (aA) \times (bA)$.

Exercice 10. Soit A un anneau commutatif unitaire et B un sous-anneau. Le *conducteur* C de B dans A est l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que $aA \subseteq B$.

1) Montrer que C est un idéal de A.

2) Montrer que C est également un idéal de B.
3) Si $I \subseteq B$ est un idéal de A, montrer que $I \subseteq C$.

Exercice 11. Soient A, B deux anneaux unitaires.

1) Soit I un idéal de A et J un idéal de B. Montrer que $I \times J$ est un idéal de $A \times B$.
2) Décrire l'ensemble des idéaux de $A \times B$ en fonction de ceux de A et B.
3) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Montrer que $\mathfrak{p} \times B$ est un idéal premier de $A \times B$.
4) Même question qu'en 2) avec les idéaux premiers.
5) On suppose maintenant que A et B sont des corps. Déterminer les idéaux, les idéaux premiers et les idéaux maximaux de $A \times B$.

2 Cas particuliers

Exercice 12. Trouver un anneau commutatif A et deux idéaux I, J tels que $I \cup J$ n'est pas un idéal de A. Quel est le plus petit idéal de A qui contient $I \cup J$?

Exercice 13. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $I_x \coloneqq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cas particulier de l'idéal $\mathcal{I}(V)$ rencontré dans l'Exercice 5). *Indication* : on pourra montrer que tout idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel.

Exercice 14. Soient k un corps et $x, y \in k$.

1) Montrer que $(X - x)$ est un idéal maximal de $k[X]$.
2) Montrer que $(X - x, Y - y)$ est un idéal maximal de $k[X, Y]$. *Remarque : quand k est algébriquement clos, on peut prouver la réciproque, qui constitue une forme faible du « théorème des zéros de Hilbert » (« Nullstellensatz »).*

Exercice 15. Soit k un corps.

1) Montrer que tout idéal bilatère propre de $\mathrm{M}_n(k)$ est trivial.
2) Expliciter les idéaux à droite et à gauche engendrés par une matrice élémentaire E_{ij}.

Soit maintenant A un anneau.

3) Soit I un idéal bilatère de A. Montrer que $\mathrm{M}_n(I)$ est un idéal bilatère de $\mathrm{M}_n(A)$.
4) Montrer que tout idéal bilatère de $\mathrm{M}_n(A)$ est de la forme précédente.
5) Montrer que l'application correspondante $I \mapsto \mathrm{M}_n(I)$ est une bijection.

Exercice 16. Soit T l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$.

1) Montrer que T est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$.
2) T est-il un idéal de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$?
3) Déterminer les idéaux de T.

Exercice 17 (Théorème des deux carrés)**.** On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i] \coloneqq \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ des *entiers de Gauss*.

1) Vérifier que c'est bien un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2) Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$ on pose $N(z) \coloneqq z\bar{z}$.
   a) Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, expliciter $N(a+ib)$.
   b) En déduire que si I est un idéal non nul de $\mathbb{Z}[i]$ alors $I \cap \mathbb{Z}^* \neq \emptyset$.
   c) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[i]^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$.
   d) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que si $N(z)$ est un nombre premier alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

On se donne maintenant un nombre premier p impair. On veut donner une condition nécessaire et suffisante pour que p soit somme de deux carrés, c'est-à-dire, qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2$.

3) Montrer que p est somme de deux carrés si et seulement si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. *Indication* : utiliser N.
4) Montrer que si p est somme de deux carrés alors $p = 1 \pmod 4$.
5) Montrer que $p = 1 \pmod 4$ si et seulement si -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Indication* : on pourra considérer l'application $x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et montrer que $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un carré ssi $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
6) Montrer que si -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ alors $(p) = p\mathbb{Z}[i]$ n'est pas un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$.
7) On admet (pour l'instant) que (p) est un idéal premier de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Conclure.