Anneaux et arithmétique (ANAR)
CC 2 - Groupe magistère (1h15)

Aucun document ni appareil électronique autorisé

28 mars 2022

Avertissement : Tout résultat élémentaire de cours (c'est-à-dire, que vous pouvez démontrer en une ligne) doit être redémontré.

Exercice 1. (10 pts)

1) (1 pt) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. *Correction : Le morphisme* $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ *d'évaluation en* i *est surjectif, et si* (P) *est son noyau alors on fait la division euclidienne de* P *par* X^2+1 *pour trouver* $P = (X^2+1)Q + R$ *avec* $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ *et* $\deg R \leq 1$. *On trouve alors* $R(i) = 0$ *donc nécessairement* $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$. *Réciproquement* X^2+1 *est dans le noyau et on conclut.*

Soit k un corps. On note $\hat{k} \coloneqq k[X]/(X^2)$ et on désigne par $\epsilon \in \hat{k}$ l'image de X dans $\hat{k}$.

2) a) (1 pt) Montrer que tout élément de $\hat{k}$ s'écrit de façon unique $a + b\epsilon$ pour $a, b \in k$. *Correction : C'est clair car deux polynômes distincts de degré* ≤ 1 *ne sont pas égaux modulo* X^2.

   b) (2 pts) Montrer que l'application $\hat{k} \to \mathrm{M}_2(k)$ définie par $a + b\epsilon \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ pour $a, b \in k$ est un morphisme d'anneaux injectif. Quelle est son image ?

   Correction : Le même morphisme partant de $k[X]$ *est bien défini par propriété des anneaux de polynômes, pour que ce morphisme se factorise à travers* $\hat{k}$ *il suffit de vérifier que* X^2 *est dans le noyau. C'est bien le cas car* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2$ *est la matrice nulle. L'image est l'ensemble des matrices de la forme de l'énoncé (matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux).*

3) a) (2 pts) Déterminer les idéaux de l'anneau $\hat{k}$. Lesquels sont premiers, maximaux ? *Correction : Par le théorème de correspondance des idéaux, les idéaux de* $\hat{k}$ *sont en correspondance avec les idéaux de* $k[X]$ *qui contiennent* (X^2), *donc les idéaux* (P) *de* $k[X]$ *tels que* $(X^2) \subseteq (P)$ *donc* $P \mid X^2$. *Les seuls choix sont donc* $P = 0, X$ *ou* X^2. *L'idéal nul n'est pas premier car* $\hat{k}$ *n'est pas intègre puisque* $\epsilon^2 = 0_{\hat{k}}$ *et* $\epsilon \neq 0_{\hat{k}}$ *par unicité de l'écriture. L'idéal* (ϵ) *étant propre, c'est le seul idéal propre non nul donc il est maximal (l'anneau est unitaire donc le théorème de Krull s'applique) donc premier (et c'est donc le seul idéal premier). On peut aussi dire que* (X) *est maximal (le quotient* $k[X]/(X) \simeq k$ *est un corps) donc* (ϵ) *aussi par le théorème de correspondance.*

   b) (1 pt) Déterminer les inversibles de l'anneau $\hat{k}$. *Correction : Un élément est non inversible ssi il est dans un idéal maximal, donc un élément est inversible ssi il n'est pas dans* (ϵ). *On a alors* $\hat{k} \setminus (\epsilon) = \{a + b\epsilon : a \in k^\times, b \in k\}$. *En effet, si* $a + b\epsilon \in (\epsilon)$ *alors* $a + b\epsilon = \epsilon(a' + b'\epsilon) = a'\epsilon$ *donc* $a = 0_k$ *par unicité, et clairement* $b\epsilon \in (\epsilon)$.

c) (1 pt) Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $\hat{k}$. *Correction : Les diviseurs de zéro sont à chercher parmi les non nuls non inversibles, donc dans* $(\epsilon) = \{b\epsilon : b \in k^\times\}$. *Mais tous ceux là sont diviseurs de zéro puisque* $(b\epsilon)\epsilon = 0_{\hat{k}}$.

4) a) (1 pt) Soit $f \in k[Y]$. Montrer que dans $\hat{k}[Y]$ on a l'identité $f(Y+\epsilon) = f(Y) + \epsilon f'(Y)$, où $f' \in k[Y]$ désigne le polynôme dérivé de f. *Correction : Il suffit de le vérifier pour un monôme puisque c'est linéaire en* k. *Mais alors* $(Y+\epsilon)^n = Y^n + n\epsilon Y^{n-1}$ *et c'est ce qu'on veut.*

b) (1 pt) L'égalité précédente reste-t-elle vérifiée pour $f \in k[[Y]]$? *Correction : Oui, mais ici la justification précédente ne suffit pas car les monômes ne forment plus une base en tant que* k*-espace vectoriel. Cependant, le même calcul donne* $\sum_{n\geq 0} a_n(Y+\epsilon)^n = \sum_{n\geq 0} a_n Y^n + \epsilon \sum_{n \geq 0} n a_n Y^{n-1}$ *donc ça fonctionne également.*

Exercice 2. (4 pts) Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires. Soit S une partie multiplicative de A et soit T une partie multiplicative de B.

1) (1 pt) Montrer que $S \times T$ est une partie multiplicative de $A \times B$. *Correction : On a* $1_{A\times B} = (1_A, 1_B) \in S \times T$. *La stabilité par multiplication est claire : si* $(s,t), (s',t') \in S \times T$ *alors* $(ss', tt') \in S \times t$ *puisque* $ss' \in S$ *et* $tt' \in T$.

2) (3 pts) Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel d'anneaux $(S\times T)^{-1}(A\times B) \simeq S^{-1}A \times T^{-1}B$. *Correction : On a un morphisme naturel* $A \times B \to S^{-1}A \times T^{-1}B$ *donné par* $(a,b) \mapsto (\frac{a}{1_A}, \frac{b}{1_B})$ *(c'est bien un morphisme par composition). Clairement l'image d'un élément* $(s,t) \in S \times T$ *est inversible, donc on en déduit un morphisme* $(S\times T)^{-1}(A\times B) \to S^{-1}A \times T^{-1}B$. *Il est surjectif puisque* $(\frac{a}{s}, \frac{b}{t})$ *est l'image de* $\frac{(a,b)}{(s,t)}$. *Pour l'injectivité, si* $(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) = 0_{S^{-1}A\times S^{-1}B}$ *alors* $\frac{a}{s} = 0_{S^{-1}A}$ *et* $\frac{b}{t} = 0_{S^{-1}B}$ *donc il existe* $(s',t') \in S \times T$ *tel que* $s'a = 0_A$ *et* $t'b = 0_B$ *donc* $(s',t')(a,b) = 0_{A\times B}$ *donc* $\frac{(a,b)}{(s,t)} = 0_{(S\times T)^{-1}(A\times B)}$.

Exercice 3. (6 pts)

1) (2 pts) Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer qu'une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n X^n \in A[[X]]$ est inversible si et seulement si $a_0 \in A^\times$. *Correction : Si* $FG = 1_{A[[X]]}$ *alors* $a_0 b_0 = 1_A$ *donc* $a_0 \in A^\times$. *Réciproquement, on fait une analyse : si* $FG = 1$ *alors* $a_0 b_0 = 1_A$ *et pour tout* $n \geq 1$ *on a* $\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = 0_A$. *On peut donc poser* $b_0 := a_0^{-1}$ *et* $b_n := -a_0^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k$ *pour* $n \geq 1$.

2) Soit k un corps de caractéristique différente de 2.

a) (2 pts) Soit $F = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in k[[X]]$ avec $a_0 \neq 0_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un carré dans $k[[X]]$, c'est-à-dire, qu'il existe une série formelle $G \in k[[X]]$ telle que $F = G^2$. *Correction : Analyse. Si* $G = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ *est telle que* $F = G^2$ *alors* $a_n = \sum_{m=0}^n b_m b_{n-m}$ *donc* $a_0 = b_0^2$ *et* $a_n = 2b_0 b_n +$ *des termes en* b_m *pour* $m < n$. *Ainsi, nécessairement* a_0 *est un carré, puisqu'il est non nul on a également* $b_0 \neq 0_k$ *et par hypothèse sur la caractéristique on a* $2b_0 \neq 0_k$ *donc on peut construire* b_n. *La synthèse fonctionne.*

b) (2 pts) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de $k[[X]]$ soit un carré. *Correction : On en déduit qu'une série formelle est un carré ssi sa valuation est paire et son terme de plus bas degré est un carré non nul dans* k. *Le sens direct est clair, et le sens réciproque vient d'être fait (on factorise juste par* $X^{\text{la valuation}}$ *avant, qui est un carré par hypothèse).*