Anneaux et arithmétique (ANAR)
CC 2 - Groupe magistère (1h15)

Aucun document ni appareil électronique autorisé

28 mars 2022

Avertissement : Tout résultat élémentaire de cours (c'est-à-dire, que vous pouvez démontrer en une ligne) doit être redémontré.

Exercice 1. (10 pts)

1) (1 pt) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Soit k un corps. On note $\hat{k} := k[X]/(X^2)$ et on désigne par $\epsilon \in \hat{k}$ l'image de X dans $\hat{k}$.

2) a) (1 pt) Montrer que tout élément de $\hat{k}$ s'écrit de façon unique $a + b\epsilon$ pour $a, b \in k$.
   b) (2 pts) Montrer que l'application $\hat{k} \to \mathrm{M}_2(k)$ définie par $a + b\epsilon \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ pour $a, b \in k$ est un morphisme d'anneaux injectif. Quelle est son image ?
3) a) (2 pts) Déterminer les idéaux de l'anneau $\hat{k}$. Lesquels sont premiers, maximaux ?
   b) (1 pt) Déterminer les inversibles de l'anneau $\hat{k}$.
   c) (1 pt) Déterminer les diviseurs de zéro de l'anneau $\hat{k}$.
4) a) (1 pt) Soit $f \in k[Y]$. Montrer que dans $\hat{k}[Y]$ on a l'identité $f(Y+\epsilon) = f(Y) + \epsilon f'(Y)$, où $f' \in k[Y]$ désigne le polynôme dérivé de f.
   b) (1 pt) L'égalité précédente reste-t-elle vérifiée pour $f \in k[[Y]]$?

Exercice 2. (4 pts) Soient A et B deux anneaux commutatifs unitaires. Soit S une partie multiplicative de A et soit T une partie multiplicative de B.

1) (1 pt) Montrer que $S \times T$ est une partie multiplicative de $A \times B$.
2) (3 pts) Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel d'anneaux $(S \times T)^{-1}(A \times B) \simeq S^{-1}A \times T^{-1}B$.

Exercice 3. (6 pts)

1) (2 pts) Soit A un anneau commutatif unitaire. Montrer qu'une série formelle $\sum_{n \geq 0} a_n X^n \in A[[X]]$ est inversible si et seulement si $a_0 \in A^\times$.
2) Soit k un corps de caractéristique différente de 2.
   a) (2 pts) Soit $F = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in k[[X]]$ avec $a_0 \neq 0_k$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que F soit un carré dans $k[[X]]$, c'est-à-dire, qu'il existe une série formelle $G \in k[[X]]$ telle que $F = G^2$.
   b) (2 pts) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de $k[[X]]$ soit un carré.