Anneaux et arithmétique (ANAR)
CC 1 - Groupe magistère (1h15)

Aucun document ni appareil électronique autorisé

21 février 2022

Exercice 1. Soit A un anneau commutatif unitaire intègre.

1) a) Montrer que $(A[X])^\times = A^\times$.

   b) En déduire que si k est un corps alors $(k[X_1, \dots, X_n])^\times = k^\times$.

2) Soit $P \in A[X]$ irréductible et soit $a \in A$. Montrer que $P(X+a) \in A[X]$ est irréductible.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif unitaire. Le *radical de Jacobson* de A, noté $J(A)$, est l'intersection des idéaux maximaux de A.

1) Déterminer $J(\mathbb{Q})$.
2) On veut montrer que $J(\mathbb{Z}) = \{0\}$.
   a) Rappeler (sans démonstration) la forme des idéaux de $\mathbb{Z}$.
   b) Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
   c) En déduire les idéaux maximaux.
   d) Conclure.
3) Soit $a \in A$.
   a) Montrer que si a est contenu dans un idéal maximal de A alors $a \notin A^\times$.
   b) Montrer la réciproque.
4) Si $a \notin J(A)$, montrer qu'il existe $b \in A$ tel que $1_A - ab \notin A^\times$.
5) Montrer la réciproque et en déduire une description de $J(A)$.
6) En déduire le radical de Jacobson de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3 (Critère d'Eisenstein)**.** Soit p un nombre premier et soit $n \geq 1$.

1) Soit k un corps.
   a) Soit $P \in k[X]$. Montrer que si $\alpha \in k$ est racine de P alors $X - \alpha$ divise P dans $k[X]$.
   b) En déduire que si $P, Q \in k[X]$ sont deux polynômes tels que $PQ = X^n$ alors il existe $a, b \geq 0$ avec $a + b = n$ et $\lambda \in k^\times$ tels que $P = \lambda X^a$ et $Q = \lambda^{-1} X^b$.
2) Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que $p \mid a_k$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
   a) Soient $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ non constants tels que $P = QR$.
      i) En passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, montrer que tous les coefficients de Q et R, excepté les coefficients dominants, sont divisibles par p.
      ii) En déduire que $p^2 \mid a_0$.
   b) En déduire que si $p^2 \nmid a_0$ alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
3) Exhiber un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X]$ de degré n.
4) Montrer que $\Phi_p \coloneqq X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.