TD1 : Rappel et optimisation sans contrainte

Exercice 1.
Calculer la matrice Jacobienne de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2+y^3, y, 3\cosh x + \sinh y)^T \end{array}$$

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est-elle $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$? La fonction est-elle coercive ?

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Déterminer le gradient et la matrice Hessienne de f. Cette dernière est-elle semi-définie positive, définie positive ?

Exercice 4.
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|Ax-b\|^2 \end{array}$$

Cette fonction est-elle coercive ?

Exercice 5.
Soient f et g deux fonctions numériques définies sur une même partie A de $\mathbb{R}$.

1. Prouver que si $f \leq g$ et si f est minorée sur A, alors g est minorée sur A et $\inf(f) \leq \inf(g)$
2. Prouver que si f est majorée sur A alors $-f$ est minorée sur A et $\inf(f) = -\sup(f)$
3. Prouver que si f et g sont toutes deux majorées sur A alors, alors $f+g$ est majorée sur A et :

$$\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$$

4. Prouver que si $\lambda > 0$ alors $\sup(\lambda.f) = \lambda.\sup(f)$

Exercice 6.
Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles différentiables ? Si oui , quelle est la différentielle ?

a) $f(x) = \|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|.$

b) $f(x) = \|x\|_2^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$

c) $f(x) = \|x\|_p^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$ avec $p \in \mathbb{N},\ p \geq 3.$

Exercice 7.
Déterminer les extrémas locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

a) $f_1(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,

b) $f_2(x, y) = 3x^3 + xy^2 - xy$,

c) $f_3(x, y) = x^4 + \frac{1}{3}y^3 - 4y - 2$,

d) $f_4(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

Pour chaque fonction, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 8.
Soit la fonction, définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$$

1. Montrer que f est coercive.
2. Calculer les points critiques de f.
3. En déduire le minimum global de f.

Exercice 9.
Calculer les extremas globaux de $f(x, y) = 5x^2 + y^2 - 2xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ en se ramenant à un problème d'optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}$. Faites une interprètation géométrique.

Exercice 10.
Calculer les extremas globaux de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 1$ en se ramenant à un problème d'optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11.
Calculer les extremas globaux de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y^2 = 1$ en se ramenant à un problème d'optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12.
On considère la fonction J_p définie sur $\mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{R}$).

$$J_p(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - p(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

1. Montrer que la fonction J_p est coercive, c'est-à-dire que $\lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} J_p(x, y, z) = +\infty$. En déduire que J_p admet un minimum global.
2. Montrer qu'il existe une valeur $p_0 \in \mathbb{R}$ telle que :
   (a) Pour $p \leq p_0$, J_p admet un seul point critique.
   (b) Pour $p > p_0$, J_p admet 27 points critiques.

   On précisera la valeur de p_0 ainsi que celle des 27 points critiques.
3. Trouver les minima globaux de J_p lorsque $p \leq p_0$.
4. On suppose maintenant $p > p_0$. Calculer le Hessien de J_p et étudier la nature des points critiques. En déduire que la fonction J_p admet 8 minima globaux que l'on précisera.

Exercice 13 (Problèmes de gestion de stocks).
Soient $p_1 = 52$ et $p_2 = 44$ les prix respectifs de deux produits . Soient q_1 et q_2 les quantités respectives de ces produits. Le revenu issu de la vente est donc : $R = p_1\, q_1 + p_2\, q_2$. La fonction coût est : $C = q_1^2 + q_1\, q_2 + q_2^2$ et le bénéfice réalisé est : $\Pi = R - C$. Trouver les quantités q_1 et q_2 maximisant le bénéfice.

Exercice 14.
Même problème avec des prix adaptatifs , i.e. variant en fonction de la quantité de produits :

$$\begin{cases} p_1 = 256 - 3\, q_1 - q_2 \\ p_2 = 222 + q_1 - 5\, q_2 \end{cases}$$

Exercice 15.
Même problème avec des prix adaptatifs , i.e. variant en fonction de la quantité de produits :

$$\begin{cases} p_1 &= 256 - 3\, q_1 - \; q_2 \\ p_2 &= 222 + q_1 \; - \; 5\, q_2 \end{cases}$$

Exercice 16 (Résolution d'un système linéaire : moindres carrés).
On considère le système d'équations linéaires d'ordre n :

$$Ax = b \tag{1}$$

où A est une matrice symétrique n $\times$ n et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que résoudre (1) est équivalent à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)\} \tag{2}$$

On note $J(x) = \dfrac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ et (,) désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

b) Que se passe-t'il si A n'est plus symétrique ?

c) Comment peut-on étendre la méthode à un système de n équations à p inconnues avec n $\neq$ p ?

Exercice 17.
Vérifier que le calcul de l'inverse d'un scalaire α par la méthode de Newton correspond à la méthode itérative :

$$x_{k+1} = x_k(2 - \alpha x_k) \quad , \quad k \geq 0$$

Construire , par analogie , une méthode itérative d'approximation de l'inverse d'une matrice inversible A , de la forme :

$$\begin{array}{c} B_0 \text{ matrice arbitraire} \\ B_{k+1} = \text{ fonction}(B_k, A), \; k \geq 0 \end{array}$$

Démontrer qu'une CNS de convergence de cette méthode est : $\rho(I - AB_o) < 1$.

Supposant la matrice A symétrique , définie , positive et supposant connu son rayon spectral ρ, comment choisir simplement la matrice B_0 pour vérifier la condition précédente ?