Chapitre 4

LA FORMULE DE TAYLOR ET SES APPLICATIONS

Nous avons vu dans le premier chapitre qu'un problème important en analyse est le calcul de limites. Par exemple,

$$\text{Calculer : } \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to +\infty} (1+\frac{1}{n})^n.$$

Ces limites sont des "formes indéterminées". Ce chapitre vous donnera une méthode simple pour les calculer.

Un autre problème important est celui de l'approximation d'une fonction. Si on a affaire à une fonction compliquée, disons

$$y = (x-1)\exp(\frac{1}{x^2-3x+2})$$

on aimerait bien la remplacer par une fonction plus simple, par exemple une fonction polynômiale, pour mieux l'étudier. Il y a toutes sortes d'approximations, suivant les besoins. Ici, nous n' étudierons que l'approximation d'une fonction au voisinage d'un point (ce point peut être $\pm\infty$). C'est ce qu'on appelle l'approximation locale de la fonction.

La formule de Taylor donne une réponse simple à ces deux problèmes.

1. LA REGLE DE L'HOPITAL

La rêgle de l'Hôpital* est un moyen simple de calculer certaines limites de la forme indéterminée $0/0$ ou ∞/∞.

Théorème. *Soient f et g deux fonctions dérivables telles que $f(a) = g(a) = 0$. Alors,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

* Cette rêgle est due à Jean Benoulli. Elle figure dans le cours d'analyse publié en 1694 par son élève, le marquis de l'Hôpital. Ce n'était pas du plagiat car Bernoulli la lui avait vendue.

pourvu que cette dernière limite existe.

La démonstration que donne l'Hôpital est celle-ci :

$$\frac{f(a+dx)}{g(a+dx)} = \frac{f(a)+f'(a)dx}{g(a)+g'(a)dx} = \frac{f'(a)dx}{g'(a)dx} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

On peut rendre l'argument plus rigoureux en utilisant la formule du chapitre 2 :

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + o(\Delta x)$$

.

Exemples.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1}$. Ici $f(x) = \ln x, f'(x) = 1/x$ et $g(x) = x^2-1, g'(x) = 2x$. On obtient donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1/x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\dfrac{1}{n})^n$. Calculons plutôt $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$. Si cette limite existe, l'autre limite, obtenue en faisant $x = 1/n$, existera a fortiori et lui sera égale. Ainsi on peut utiliser des résultats sur les limites de fonctions pour obtenir des limites de suites. On ne peut pas appliquer directement la rêgle de l'Hôpital car ce n'est pas de la forme $f(x)/g(x)$. On s'y ramène en remarquant que $(1+x)^{1/x} = \exp(\ln(1+x)/x)$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/(1+x)}{1} = 1$ (on aurait pu aussi remarquer que c'est la dérivée de $\ln x$ en 1). Par continuité de la fonction exp, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = \exp 1 = e$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\dfrac{1}{n})^n = e$.

Remarques.

a) Si dans la rêgle de l'Hôpital, $f'(a) = g'(a) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ est encore une forme indéterminée et on a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

(et ainsi de suite…)

Par exemple,

$$\lim_{x\to a} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to a} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to a} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

b) La rêgle de l'Hôpital a plusieurs généralisations. D'abord, elle marche encore quand $f(a) = g(a) = \infty$ (c'est-à-dire $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ et pour $a = \pm\infty$. (Cela peut se montrer en introduisant selon les cas les fonctions $f_1(x) = 1/f(x)$

et $g_1(x) = 1/g(x)$ ou les fonctions $f_1(u) = f(1/u)$ et $g_1(u) = g(1/u)$ et quelques manipulations algébriques). Par exemple

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

c) La rêgle de l'Hopital est commode mais d'un usage limité. Par exemple, elle ne s'applique pas aux formes indéterminées $\infty - \infty$. De plus, quand on veut avoir une information plus complète sur l'allure d'une courbe au voisinage d'un point ou à l'infini (asymptotes, position par rapport à l'asymptote, il vaut mieux utiliser les développements limités.

2. LA FORMULE DE TAYLOR

Rappelons que la définition de la dérivée $f'(a)$ peut être écrite

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \quad \text{avec} \quad \frac{o(h)}{h} \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

Le terme $f(a) + f'(a)h$ s'appelle l'approximation d'ordre 1 de la fonction f au point a et c'est un polynôme de degré 1 en h. La formule de Taylor généralise cette formule et donne l'approximation d'ordre n de f au point a. On voudrait donc écrire

$$f(a+h) = \text{polynôme en } h \text{ de degré } n + \text{reste}$$

où le reste est petit dans un sens qu'on précisera. Supposons d'abord que f soit un polynôme de degré n. En développant $f(a+h)$, on obtient une expression

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n$$

avec certains coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il est facile d'exprimer ces coefficients : on a $f(a) = a_0$, en dérivant par rapport à h et en faisant $h = 0$, on trouve $f'(a) = a_1$, puis $f''(a) = 2a_2$ et ainsi de suite jusqu'à $f^{(n)}(a) = n(n-1)\ldots 2a_n = n!a_n$, d'où

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

C'est la formule de Taylor pour les polynômes. En général, on a :

Théorème (formule de Taylor). *Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I. On suppose que f admet des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ sur I. alors pour tout h tel que $a+h$ soit dans I, il existe c entre a et $a+h$ tel que :*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{(n+1)}$$

La partie $f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$ s'appelle le polynôme de Taylor de degré n de f au point a et $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{(n+1)}$ s'appelle le reste R_{n+1} d'ordre $n+1$. Supposons que sur l'intervalle $[a, a+h]$ (ou $[a+h, a]$ si $h < 0$), la dérivée $f^{(n+1)}(c)$ soit bornée par M, alors R_{n+1}/h^n tend vers 0 quand h tend vers 0. On écrit $R_{n+1} = o(h^n)$. En fait, on a

Théorème (formule de Taylor avec reste o). *Si $f^{(n)}(a)$ existe, alors*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

Revenons à la première version. Dans le cas où $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis. On peut démontrer ce théorème par récurrence en appliquant le théorème des accroissements finis.

Donnons quelques exemples.

Si on applique la formule de Taylor à la fonction $f(x) = e^x$, les dérivées succesives $f^{(n)}(x)$ sont toutes égales à e^x. Au point $a = 0$, on a $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$, d'o'u

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Notons au passage que si $|x| \leq 1$, alors le reste R_{n+1} est borné par $e/(n+1)!$. Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On obtient ainsi

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

où la somme infinie est la limite de la suite des sommes finies.

De la même façon on obtient

$$\begin{aligned}
\cosh x =& 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sinh x =& x + \frac{x^3}{(3)!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\cos x =& 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sin x =& x - \frac{x^3}{(3)!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} =& 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) =& x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}$$

Application à des problèmes d'extrémaux.

Proposition. *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I. On suppose que f' et f'' existent et sont continues sur I.*

(i) Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.

(ii) Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.

Démonstration. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 : pour tout h, il existe c entre a et $a+h$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(c)}{2}h^2$$

Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors $f''(c) > 0$ pour $|h|$ assez petit et alors $f(a+h) > f(a)$. Donc f admet un minimum local en a. L'autre assertion se démontre de même.

Exemple. On considère une boîte de base carrée de côté a, de hauteur h et de volume $V = 1000\text{cm}^3$. On suppose qu'elle n'a pas de côté supérieur. La surface de ses 5 faces est $A = a^2 + 4ah = a^2 + 4a(V/a^2) = a^2 + 4V/a$. On a $A'(a) = 2a - 4V/a^2$ et $A''(a) = 2 + 8V/a^3$. On trouve que $A'(a) = 0$ pour $a = (2V)^{1/3}$. Alors A admet un minimum local. C'est le minimum car A tend vers l'infini quand a tend vers 0 et l'infini.

3. DEVELOPPEMENTS LIMITES

Définition. *On appelle développement limité (D.L.) de la fonction f à l'ordre n au voisinage de a une égalité*

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots + a_nh^n + o(h^n)$$

où, comme d'habitude, $o(h^n)$ désigne une fonction négligeable devant h^n,c'est-à-dire telle que $\dfrac{o(h^n)}{h^n}$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Le théorème de Taylor dit qu'une fonction qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre n en a admet un D.L. d'ordre n en a.

Propriétés des D.L.

— S'il existe, le D.L. (d'ordre n au point a) est unique.

— On calcule le D.L. d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une fonction composée en appliquant les rêgles usuelles de calcul de la somme, du produit, du quotient et de composition de polynômes et en négligeant les termes de degré strictement supérieur à n.

Exemples.

a) On veut calculer le D.L. (à l'ordre 3) de $\sqrt{1+h}-\sqrt{1-h}$ quand $h \to 0$. On écrit

$$\sqrt{1+h} = 1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\frac{1}{16}h^3+o(h^3)$$

$$\sqrt{1-h} = 1-\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2-\frac{1}{16}h^3+o(h^3)$$

D'où :

$$\sqrt{1+h}-\sqrt{1-h} = h+\frac{1}{8}h^3+o(h^3)$$

b) On veut calculer le D.L. (à l'ordre 5 au point 0) de tan. On écrit

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

Puis on fait la division suivant les puissances croissantes du polynôme $P(x) = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ par le polynôme $Q(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. On obtient

$$P(x) = (x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5)Q(x)+x^7(\frac{19}{360}-\frac{1}{380}x^2)$$

On en déduit que

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

4. APPLICATIONS

a) Recherche de limites.

Les D.L. sont un outil puissant pour calculer des limites, beaucoup plus universel que la rêgle de l'Hôpital. Par exemple, pour calculer

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$$

on écrit

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = (\sqrt{x})(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}})$$

En utilisant le D.L. calculé plus haut, où on remplace h par $1/x$, on obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} =& (\sqrt{x})(\frac{1}{x}+\frac{1}{8x^3}+o(\frac{1}{x^3}))\\ =& \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2}))\end{aligned}$$

On voit immédiatement que $f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, mais on a beaucoup mieux : la courbe $y = f(x)$ est asymptote à la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et est située au-dessus de cette courbe.

b) Etude d'une courbe paramétrée au voisinage d'un point.

Vous savez que $(x = \cos t, y = \sin t)$ où $0 \le t \le 2\pi$ est l'équation paramétrique du cercle $x^2 + y^2$. Plus généralement, on appelle courbe paramétrée une fonction

$$F : I \to \mathbf{R}^2$$

où I est un intervalle et $F(t) = (f(t), g(t))$. On écrit aussi $(x = f(t), y = g(t))$. On appelle t le paramètre ; par exemple, en cinématique, le paramètre t est le temps et $(x(t), y(t))$ est la position d'un objet mobile au temps t. L'image de F est une courbe du plan. En cinématique, cette courbe est la trajectoire de l'objet mobile. La dérivée de F au point t est simplement $F'(t) = (f'(t), g'(t))$. Ce vecteur donne la direction de la tangente à la courbe au point t. En cinématique, c'est le vecteur- vitesse et la dérivée seconde $F''(t) = (f''(t), g''(t))$ est le vecteur-accélération. La formule de Taylor se généralise sans difficulté à la fonction F. Si F admet des dérivées jusqu'à l'ordre n au point a, on peut écrire

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{2!}F''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}F^{(n)}(a) + o(h^n)$$

On a écrit les scalaires avant les vecteurs. En outre $o(h^n)$ est en fait un vecteur $o(h^n) = (o(h^n), o(h^n))$. On dit que $F(a)$ (ou souvent a) est un point stationnaire si $F'(a) = 0$. Il est intéressant d'étudier la courbe au voisinage d'un point stationnaire. Appelons p le plus petit entier tel que $F^{(p)}(a) \neq 0$ et q le plus petit entier $> p$ tel que les vecteurs $F^{(p)}(a), F^{(q)}(a)$ ne soient pas colinéaires. Alors, on peut écrire

$$F(a+h) = F(a) + \frac{h^p}{p!}(1+o(h))F^{(p)}(a) + \frac{h^q}{q!}(1+o(h))F^{(q)}(a)$$

L'allure de la courbe au voisinage de a dépend de la parité de p et de q. La courbe est tangente à $F^{(p)}(a)$ au point a. Si p est pair, on a un point de rebroussement. Si de plus q est impair, la courbe traverse sa tangente ; on dit que le point de rebroussement est de première espèce. Si q est pair, la courbe ne traverse pas sa tangente ; on dit que le point de rebroussement est de deuxième espèce.

Université d'Orléans **Département de Mathématiques**
DEUG B1 **Année 1994-95**

FEUILLE N° 4

Exercice 1

Calculer les limites suivantes (en utilisant par exemple la rêgle de l'Hôpital)

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$$
$$b) \quad \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$$
$$c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 3x}{\ln \cos 2x}$$

Exercice 2

Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = a\frac{\ln x}{x} + b\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 3

Etudier les branches infinies de la courbe

$$y = (x-1)\exp(\frac{1}{x^2-3x+2})$$

On déterminera les asymptotes et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Exercice 4

Etudier la courbe paramétrée

$$(x = 2\cos t - \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t)$$

au voisinage de $t = 0$. (Le point correspondant de la courbe est-il un point de rebroussement et, si oui, de quelle espèce?)

TRAVAUX PRATIQUES

Si a est une racine approchée de l'équation $f(x) = 0$, montrer qu'en général, $a - f(a)/f'(a)$ est une meilleure approximation (méthode de Newton). Itérer cette méthode pour calculer une racine approchée 10^{-3} de l'équation $x - (1/c)\ln x = cste$ du modèle S.I.R. (voir feuille 1).