GEOMETRIE DU PLAN ET NOMBRES COMPLEXES

---

1. Rappels.

Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbf{R}$ et i vérifie $i^2 = -1$. On définit

l'addition
$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$
et la multiplication
$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy')) + i(xy' + yx')$$

On note $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Théorème. *Muni de l'addition et de la multiplication,* $\mathbf{C}$ *est un corps. Donc,*
(i) $(\mathbf{C}, +)$ *est un groupe (abélien) ;*
(ii) $(\mathbf{C}^*, .)$ *est un groupe (abélien).*

Par construction, $\mathbf{C}$ s'identifie à $\mathbf{R}^2$ comme espace vectoriel réel. On peut donc voir $\mathbf{C}$ comme un plan (vectoriel ou affine). Si on voit $\mathbf{C}$ comme un plan affine, il est d'usage de distinguer un point $M = (x, y)$ de ce plan et son affixe $z = x + iy$. S'il n'y a pas d'ambiguité, nous confondrons le point et son affixe.

L'écriture polaire d'un nombre complexe $z = x + iy$ non nul est $z = re^{i\theta}$ où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ est défini par $\cos\theta = x/r$ et $\sin\theta = y/r$. On appelle $r = |z|$ le module de z et θ son argument. On définit le nombre complexe conjugué $\overline{z} = x - iy$. On a $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Théorème (admis). *Tout polynôme* $P \in \mathbf{C}[X]$ *de degré* n *admet exactement* n *racines dans* $\mathbf{C}$ *comptées avec leur multiplicité.*

Exemple : les racines n-ièmes de l'unité. Ce sont les n solutions de l'équation $z^n - 1 = 0$. Elles sont de la forme $e^{2i\pi k/n}$, où $k = 0, 1, \dots n - 1$. On a vu que l'ensemble C_n des racines n-ièmes de l'unité est un sous-groupe de $(\mathbf{C}^*, .)$ isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

L'équation cartésienne d'une droite dans $\mathbf{C}$ est de la forme
$$\Re(\overline{u}z) = c$$
où $u \in \mathbf{C}^*$ et $c \in \mathbf{R}$.

L'équation d'un cercle de centre z_0 et de rayon r est

$$|z - z_0|^2 = r^2.$$

2. Similitudes.

Définition. *Soient $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$. On définit*

(i) la similitude directe $\sigma_{a,b}$ comme l'application $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\sigma_{a,b}(z) = az + b.$$

(ii) la similitude indirecte $\overline{\sigma}_{a,b}$ comme l'application $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que

$$\overline{\sigma}_{a,b}(z) = \overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}$$

Proposition.

(i) Les similitudes directes ou indirectes sont des applications affines inversibles ;

(ii) les similitudes directes ou indirectes forment un sous-groupe du groupe $GA(\mathbf{R}^2)$ des automorphismes affines de $\mathbf{R}^2$;

(iii) les similitudes directes forment un sous-groupe distingué du groupe des similitudes.

Exemples. Si $a = 1$, $z \to z+b$ est une translation. Si $b = 0$ et $a = k \in \mathbf{R}^*$, $z \to az$ est l'homothétie de centre O de rapport k. Si $a = e^{i\theta}$, $z \to e^{i\theta}z$ est la rotation de centre O et d'angle θ. La similitude indirecte $z \to \overline{z}$ (c'est la conjugaison complexe) est la réflexion par rapport à l'axe Ox. Toute similitude directe est la composée d'une homothétie, d'une rotation et une translation. Toute similitude indirecte est la composée d'une similitude directe et d'une reflexion.

3. Homographies.

Définition. *Soient $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On définit l'homographie $h = h_{a,b,c,d}$ par*

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Notons que si $c \neq 0$, son domaine est $\mathbf{C} \setminus \{-d/c\}$ et son image est $\mathbf{C} \setminus \{a/c\}$. On ajoute le point à l'infini ∞ et on définit $h : \mathbf{C} \cup \{\infty\} \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ en posant $h(-d/c) = \infty$ et $h(\infty) = a/c$.

Proposition.

(i) La composée de deux homographies est une homographie.

(ii) *Toute homographie est inversible (comme application de* $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ *dans lui-même.*
(ii) *Les homographies forment un groupe pour la composition.*

Exercice. Montrer que le groupe des homographies est isomorphe au sous-groupe quotient $GL(\mathbf{C}^2)/Z$ où Z est le centre de $GL(\mathbf{C}^2)$.

Proposition. *Etant donnés* $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ *distincts, il existe une homographie* h *et une seule telle que*

$$h(z_2) = 1, \quad h(z_2) = 0, \quad h(z_4) = \infty$$

Explicitement, si $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$,

$$h(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Definition. *On définit le birapport de 4 points distincts* z_1, z_2, z_3, z_4 *comme*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = h(z_1)$$

où h *est l'application définie dans la proposition ci-dessus.*

Proposition. *Les homographies conservent le birapport : si* h *est une homothétie et si* z_1, z_2, z_3, z_4 *sont 4 points distincts, alors*

$$(h(z_1), h(z_2), h(z_3), h(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Théorème. *Soient* z_1, z_2, z_3, z_4 *distincts. Alors, le birapport* (z_1, z_2, z_3, z_4) *est réel si et seulement si les 4 points appartiennent à une droite ou à un cercle.*

Corollaire. *L'image d'une droite ou d'un cercle par une homothétie est une droite ou un cercle.*