LE PLAN ET L'ESPACE AFFINES

A. ESPACES ET APPLICATIONS AFFINES

1. Définitions et premières propriétés

La théorie peut être développée pour un corps K quelconque mais nous supposerons ici que K est le corps des nombres réels $\mathbf{R}$. A moins d'indication contraire, *espace vectoriel* veut dire espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie.

Définition. *Un espace affine dirigé par un espace vectoriel $\vec{E}$ est un ensemble E sur lequel le groupe additif $(\vec{E},+)$ agit (à droite) librement et transitivement. On note l'action*

$$\begin{array}{ccc} E\times\vec{E} & \to & E \\ (P,\vec{a}) & \mapsto & P+\vec{a} \end{array}$$

On a donc

(i) $P+\vec{a}=P \quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\vec{0}\,;$

(ii) pour tout couple $(P,Q)\in E\times E$, il existe $\vec{a}\in\vec{E}$ tel que $Q=P+\vec{a}$. De plus, d'après (i), $\vec{a}$ est unique. On le note $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$.

Les éléments de E sont appelés *points* et ceux de $\vec{E}$ sont appelés *vecteurs*.

Exemple.

Quand on oublie son origine O, un espace vectoriel $\vec{E}$ devient un espace affine E. Par exemple, un élement de $\mathbf{R}^2$ peut être vu comme un point $P=(x,y)$ ou comme un vecteur $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Etant donné un point P et un vecteur $\vec{a}$, on définit $Q=P+\vec{a}$ par $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\vec{a}$. Cette définition ne dépend pas de l'origine : pour un point O' quelconque, on a encore $\overrightarrow{O'Q}=\overrightarrow{O'P}+\vec{a}$.

Proposition. *L'application qui à un couple de points $(P,Q)\in E\times E$ associe le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ tel que $Q=P+\overrightarrow{PQ}$ vérifie :*

(i) Relation de Chasles : $\quad\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(ii) $\overrightarrow{AB}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad A=B$.

(iii) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

(iv) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Définition. *Un repère affine d'un espace affine $(E,\vec{E})$ est un couple $\mathcal{R}=(O;\mathcal{B})$ où O est un point de E et $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $\vec{E}$.*

Tout point P de E peut être écrit de manière unique

$$P = O + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i.$$

On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ et on écrit $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$.

2. Sous-espaces affines.

Définition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine, F un sous-ensemble de E et $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On dit que $(F, \vec{F})$ est un sous-espace affine si*

(i) $P \in F$ and $\vec{a} \in \vec{F} \quad \Rightarrow \quad P + \vec{a} \in F$;

(ii) $(P, Q) \in F \times F \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} \in F$.

Un sous-espace affine $(F, \vec{F})$ satisfait la définition d'un espace affine. Sa dimension est la dimension de $\vec{F}$. Une *droite affine* est sous-espace affine de dimension un. Un *plan affine* est un sous-espace affine de dimension deux.

Proposition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine.*

(i) Soit $(F, \vec{F})$ un sous-espace affine ; alors pour tout $P \in F$, on a $F = P + \vec{F}$;

(ii) Réciproquement, étant donné un point P de E et un sous-espace vectoriel $\vec{F}$ de $\vec{E}$, $F = P + \vec{F}$ est un sous-espace affine dirigé par $\vec{F}$.

On dit que $P + \vec{F}$ est le sous-espace affine passant par P et dirigé par $\vec{F}$.

Le choix d'une base $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p)$ de $\vec{F}$ donne une équation paramétrique du sous-espace affine $P + \vec{F}$: tout point de ce sous-espace affine peut être écrit

$$Q = P + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{a}_i \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p.$$

Par exemple, l'équation paramétrique de la droite passant par le point P_0 et dirigée par le vecteur $\vec{a}$ est

$$P = P_0 + \lambda \vec{a}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Dans un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de E, cela donne avec $P = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$, $P_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})_{\mathcal{R}}$ et $\vec{a} = (a_i)_{\mathcal{B}}$

$$x_i = x_i^{(0)} + \lambda a_i.$$

Les sous-espaces affines peuvent être également définis par des équations cartésiennes, c'est-à-dire une équation linéaire ou un système d'équations linéaires. Cela suppose qu'on a choisi un repère affine $\mathcal{R}$ de E.

Par exemple, l'équation cartésienne d'une droite affine dans un plan affine muni d'un repère affine $\mathcal{R}$ est de la forme

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{où} \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

L'équation cartésienne d'un plan affine dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R}$ est de la forme

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{où} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Les déterminants sont utiles pour obtenir de telles équations.

Exemple 1.
Droite du plan passant par le point P_0 et dirigée par le vecteur $\vec{a}$.
Avec $P_0 = (x_0, y_0)$ et $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, cette droite est donnée par l'équation cartésienne :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0$$

Exemple 2.
Plan dans l'espace passant par un point P_0 et dirigé par le sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$
Avec $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, l'équation cartésienne de ce plan est :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Applications affines.

Définition. *Soit $(E, \vec{E})$ et $(F, \vec{F})$ deux espaces affines. On dit qu'une application $f : E \to F$ est affine s'il existe une application linéaire $u : \vec{E} \to \vec{F}$ telle que*

$$\forall (P, \vec{a}) \in E \times \vec{E}, \qquad f(P + \vec{a}) = f(P) + u(\vec{a}).$$

On note qu'alors, l'application linéaire u est unique. On l'appelle *partie linéaire* de f et on la note $u = f^{\#}$.

Exemples.

1) Les applications affines $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont les applications de la forme $f(x) = ax+b$ où $a, b \in \mathbf{R}$. On note que si $g(x) = cx + d$, $f \circ g(x) = acx + ad + b$.

2) Quand $E = \vec{E}$ et $F = \vec{F}$, les applications linéaires $u : \vec{E} \to \vec{F}$ sont affines avec $u^{\#} = u$.

3) Les translations sont d'autres exemples importants d'applications affines.

Définition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine et $\vec{a} \in \vec{E}$. On appelle translation de vecteur $\vec{a}$ l'application $\tau_{\vec{a}} : E \to E$ définie par $\tau_{\vec{a}}(P) = P + \vec{a}$.*

Proposition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine.*

(i) Pour tout $\vec{a} \in \vec{E}$, la translation $\tau_{\vec{a}}$ est une application affine et sa partie linéaire est l'application identique $Id_{\vec{E}}$.

(ii) Réciproquement, si $f : E \to E$ est une application affine telle que $f^{\#} = Id_{\vec{E}}$, alors f est une translation.

Proposition. *La composée $g \circ f$ de deux applications affines f et g est une application affine et on a $(g \circ f)^{\#} = g^{\#} \circ f^{\#}$.*

Proposition. *Soit $(E, \vec{E})$ et $(F, \vec{F})$ des espaces affines. Pour tout couple $(A, B) \in E \times F$ et toute application linéaire $u : \vec{E} \to \vec{F}$, il existe une application affine $f : E \to F$ et une seule telle que*

(i) $f(A) = B$ et

(ii) $f^{\#} = u$

Définition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine, $A \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On appelle homothétie de centre A et de rapport λ l'unique application affine $h : E \to E$ telle que*

(i) $h(A) = A$ et

(ii) $h^{\#}$ est l'homothétie vectorielle de rapport λ.

Proposition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. Toute application affine $f : E \to E$ dont la partie linéaire $f^{\#}$ est une homothétie vectorielle de rapport $\lambda \neq 1$ est une homothétie.*

4. Le groupe des automorphismes affines.

Définition. *Soit G, H deux groupes et $\theta : h \mapsto \theta_h$ un morphisme de H dans le groupe $Aut(G)$ des automorphismes de G. La multiplication définie sur $G \times H$ par :*

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 + \theta_{h_1}(g_2), h_1 h_2)$$

où on a noté G additivement et H multiplicativement, est une loi de groupe. Ce groupe est appelé produit semi-direct de G par H et est noté $G \rtimes_\theta H$.

Définition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. Un automorphisme affine est une application affine inversible de E dans E. On note $GA(E)$ le groupe des automorphismes affines de E (la loi de groupe est la composition). On note $T(E)$ le sous-groupe des translations.*

Proposition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espaces affine.*

(i) L'application $f \mapsto f^{\#}$ est un morphisme surjectif $GA(E) \to GL(\vec{E})$ dont le noyau est $T(E)$.

(ii) $T(E)$ est un sous-groupe normal de $GA(E)$.

(iii) Pour tout $f \in GA(E)$ et tout $\vec{a} \in \vec{E}$, on a $f \circ \tau_{\vec{a}} \circ f^{-1} = \tau_{f^{\#}(\vec{a})}$.

L'action canonique d'un automorphisme $u \in GL(\vec{E})$ sur un vecteur $\vec{a} \in \vec{E}$ donne un morphisme $\theta : GL(\vec{E}) \to Aut(\vec{E}, +)$.

Théorème. *Soit $(E, \vec{E})$ un espaces affine et $A \in E$. L'application*

$$\Phi_A : GA(E) \to \vec{E} \rtimes_\theta GL(\vec{E})$$

définie par $\Phi(f) = (\overrightarrow{Af(A)}, f^{\#})$, est un isomorphisme de groupes.

5. Projections et symétries.

Definition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espaces affine, F un sous-espace affine et $\vec{G}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\vec{F}$.*

(i) La projection sur F parallèlement à $\vec{G}$ est l'application affine $\pi : E \to F$ qui envoie $M \in E$ sur l'unique point de l'intersection $F \cap (M + \vec{G})$.

(i) La symétrie par rapport à F parallèlement à $\vec{G}$ est l'application affine $s : E \to E$ qui envoie $M = \pi(M) + \vec{z}$, où $z \in \vec{G}$ sur $s(M) = \pi(M) - \vec{z}$.

B. BARYCENTRES EN GÉOMÉTRIE AFFINE

1. Barycentres

Définition. *Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. Une famille de points pondérés est une famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ où pour tout $i \in I$, $A_i \in E$ et $\lambda_i \in \mathbf{R}$. On supposera toujours que I est un ensemble fini et que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$.*

Proposition. *Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille de points pondérés d'un espace affine E. Alors*

(i) Il existe un unique $G \in E$ tel que $\sum_I \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

(ii) Pour tout $O \in E$, on a $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\sum_I \lambda_i} \sum_I \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$.

Définition. *Le point G de la proposition précédente s'appelle le barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ et est noté $G = bary((A_i, \lambda_i)_{i\in I})$. Quand tous les λ_i sont égaux à 1 (ou à un scalaire non nul), G est appelé l'isobarycentre de la famille $(A_i)_{i\in I}$ et est noté $G = isobary((A_i)_{i\in I})$.*

Exemples. L'isobarycentre de deux points A et B est le milieu du segment $[AB]$. L'isobarycentre de trois points A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC. La droite passant par deux points distinct A et B peut être décrite comme l'ensemble des barycentres de $((A, 1-\lambda), (B, \lambda))$ où $\lambda \in \mathbf{R}$.

Proposition (associativité du barycentre). *Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ une famille de points pondéres d'un espace affine E. Soit $I = \cup_{j\in J} I_j$ une partition de I telle que pour tout $j \in J$, $\mu_j = \sum_{i\in I_j} \lambda_i \neq 0$. On définit pour tout $j \in J$, $G_j = bary((A_i, \lambda_i)_{i\in I_j})$, alors $bary((A_i, \lambda_i)_{i\in I}) = bary((G_j, \mu_j)_{j\in J})$.*

Remarque : il suffit donc de savoir calculer le barycentre d'une famille pondérée de deux points pour calculer le barycentre d'une famille pondérée d'un nombre fini quelconque de points.

2. Applications affines et barycentres

Proposition. *Soit E, E' deux espaces affines et $f : E \to E'$. On a l'équivalence de*

(i) f est une application affine ;

(ii) f respecte les barycentres, c'est-à-dire pour toute famille de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ de E, $f(bary((A_i, \lambda_i)_{i\in I})) = bary((f(A_i), \lambda_i)_{i\in I})$.

Corollaire. *Soit E un espace affine et $f : E \to E$ une application affine. On a l'équivalence de*

(i) $f \circ f = Id_E$;

(ii) f est une symétrie affine par rapport à un sous-espace affine F parallèlement à un sous-espace vectoriel supplémentaire $\vec{G}$ de $\vec{F}$.

De plus, on a $F = \{M \in E : f(M) = M\}$ et $\vec{G} = \{\vec{z} \in \vec{E} : f^{\#}(\vec{z}) = -\vec{z}\}$.

3. Sous-espaces affines et barycentres

Proposition. *Soit F une partie non vide d'un espace affine E. On a l'équivalence de*

(i) F est sous-espace affine ;

(ii) tout barycentre de famille de points pondérés de F appartient à F.

Corollaire. *Soit X une partie non vide de E. Le sous-espace affine $Aff(X)$ engendré par X est l'ensemble des barycentres de famille de points pondérés de X.*

Proposition. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de points d'un espace affine E. Soit $F = Aff(A_i, i \in I)$. On a l'équivalence de*

(i) pour tout $M \in F$, il existe une unique famille de réels $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$ et $M = bary((A_i, \lambda_i)_{i\in I})$;

(ii) pour tout $i \in I$, la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ est libre ;

(iii) il existe $i \in I$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ soit libre ;

Definition. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de points d'un espace affine E.*

(i) On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est affinement libre si elle vérifie les conditions de la proposition précédente ;

(ii) On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est génératrice si $Aff(A_i, i \in I) = E$;

(iii) On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un repère barycentrique si elle est affinement libre et génératrice ;

Corollaire. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un repère barycentrique. d'une espace affine E. Alors tout point M de E s'écrit de manière unique $M = bary((A_i, \lambda_i)_{i\in I})$ où les λ_i sont des réels tels que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. Les $(\lambda_i)_{i\in I}$ s'appellent les coordonnées barycentriques de M.*

4. Parties convexes

Rappelons la définition d'un segment dans un espace affine.

Definition. *Soit A et B deux points d'un espace affine E. On définit le segment $[AB]$ comme*

$$[AB] = \{bary((A, 1-\lambda), (B, \lambda)) : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Definition. *Soit E un espace affine. On dit qu'une partie de E est convexe si elle contient tout le segment $[AB]$ dès qu'elle contient les points A et B.*

Exemples

Les sous-espaces affines sont convexes ; un disque du plan ou une boule de l'espace sont convexes. Par contre, un disque troué n'est pas convexe. Un triangle et un carré sont convexes mais il existe des polygones non convexes.

Definition. *On appelle combinaison convexe d'une famille finie $(A_i)_{i\in I}$ de points d'un espace affine E tout barycentre $bary((A_i, \lambda_i)_{i\in I})$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in I$ et $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$.*

On écrit souvent une combinaison convexe sous la forme $G = \sum_{i \in I} \mu_i A_i$ où $\sum_{i \in I} \mu_i = 1$ (Posez $\mu_i = \lambda_i / \sum_{i \in I} \lambda_i$). Cela signifie que pour tout origine $O \in E$, $\overrightarrow{OG} = \sum_{i \in I} \mu_i \overrightarrow{OA_i}$.

Proposition. *Soit K une partie d'un espace affine E. On a l'équivalence de*

(i) K est convexe ;

(ii) toute combinaison convexe de points de K appartient à K.

Proposition.

(i) L'intersection d'une famille de parties convexes est une partie convexe.

(ii) Soit $f : E \to E'$ une application affine. L'image directe $f(K)$ d'une partie convexe K de E est convexe. L'image réciproque $f^{-1}(K')$ d'une partie convexe K' de E' est convexe.

Corollaire. *Soit X une partie d'un espace affine E. Il existe une plus petite partie convexe contenant X. On l'appelle l'enveloppe convexe de X et on la note $conv(X)$.*