RELATIONS D'EQUIVALENCE ET ACTIONS DE GROUPES

1. Rappels ensemblistes

Les ensembles seront souvent notés $X, Y, \ldots$

On note $f : X \to Y$ une application de X dans Y. On dit que X est le *domaine* de f ou ensemble de départ et que Y est l'ensemble d'arrivée. Le sous-ensemble $f(X) \subset Y$ est l'*image* de f. Le graphe de f est le sous-ensemble de $X \times Y$:

$$\text{Graphe}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

Définition. *On dit qu'une application $f : X \to Y$ est*

(i) surjective si $f(X) = Y$; de manière équivalente, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution pour tout $y \in Y$;

(ii) injective si $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$; de manière équivalente, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution pour $y \in Y$;

(iii) bijective si elle est surjective et injective ; de manière équivalente, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution pour tout $y \in Y$.

Axiome du choix Soit $f : X \to Y$ surjective. Alors il existe $g : Y \to X$ telle que pour tout $y \in Y$, $f \circ g(y) = y$.

2. Relations d'équivalence

Définition. *Une relation d'équivalence R sur un ensemble X est une relation binaire (c'est-à-dire une relation sur un couple d'éléments) $x\,R\,y$ (on utilisera aussi la notation $x \sim y$) qui est*

(i) réflexive, c'est-à-dire $\forall x \in X, x\,R\,x$;

(ii) symétrique, c'est-à-dire $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$;

(iii) transitive, c'est-à-dire $x\,R\,y \text{ et } y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$;

Le graphe de la relation d'équivalence est le sous-ensemble de $X \times X$ suivant :

$$\text{Graphe}(R) = \{(x, y) \in X \times X : x\,R\,y\}$$

La classe d'équivalence de $x \in X$ est le sous-ensemble de X suivant :

$$[x] = \{y \in X : y\,R\,x\}$$

L'ensemble quotient, noté X/R, est l'ensemble des classes d'équivalence.

Définition. *Une partition d'un ensemble X est une famille $(X_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de X telle que*

(i) $\forall i \neq j,\ X_i \cap X_j = \emptyset$
(ii) $X = \bigcup_{i \in I} X_i$.

Proposition.
(i) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une partition de l'ensemble X. Alors la relation $x\,R\,y$ si et seulement si il existe $i \in I$ tel que $x, y \in X_i$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les X_i.
(ii) Réciproquement, si R est une relation d'équivalence sur un ensemble X, ses classes d'équivalence forment une partition de X ;
(iii) On a donc une correspondence bijective entre relations d'équivalence sur X et partitions de X.

Définition. *Soit R est une relation d'équivalence sur un ensemble X. On rappelle que l'ensemble quotient, noté X/R, est l'ensemble des classes d'équivalence. L'application $\pi : X \to X/R$ telle que $\pi(x) = [x]$ est appelée application quotient.*

Proposition.
(i) Soit $f : X \to Y$ surjective. Alors la relation $x\,R\,x'$ si et seulement $f(x) = f(x')$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les images réciproques $f^{-1}(y)$ de f (appelées aussi fibres de f).
(ii) Réciproquement, soit R est une relation d'équivalence sur un ensemble X. Alors il existe un ensemble Y et une application $f : X \to Y$ surjective telle que $x\,R\,x'$ si et seulement si $f(x) = f(x')$. On dit que f définit R.
(iii) . Si $f_1 : X \to Y_1$ et $f_2 : X \to Y_2$ sont des applications surjectives qui définissent la même relation d'équivalence R, alors il existe une bijection $g : Y_1 \to Y_2$ telle que $f_2 = g \circ f_1$.

Remarque. Soit $f : X \to Y$ surjective où X est un ensemble fini. Alors

$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)|$$

Proposition. *Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble X et Z un ensemble. Les propriétés suivantes d'une application $f : X \to Z$ sont équivalentes :*
(i) $x\,R\,y \quad \Rightarrow f(x) = f(y)$;
(ii) Il existe $\tilde{f} : X/R \to Z$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$, où $\pi : X \to X/R$ est l'application quotient.

On dit alors que f est invariante par R ou que f se factorise à travers X/R et que $\tilde{f}$ est l'application induite par f.

3. Groupes

Définition. *Un groupe est un ensemble G muni d'une opération*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{array}$$

telle que

(i) (associativité) *Pour tous $g, h, k \in G$, on a $(gh)k = g(hk)$.*

(ii) (existence d'un élément neutre) *Il existe $e \in G$ tel que pour tout $g \in G$ on ait $ge = eg = g$.*

(iii) (existence d'un inverse) *Pour tout $g \in G$, il existe $h \in G$ tel que $gh = hg = e$; alors h est unique et est noté g^{-1}.*

On dit que le groupe est commutatif (ou abélien) si pour tous $g, h \in G$, on a $gh = hg$. Il est fréquent de noter additivement l'opération d'un groupe commutatif : on écrit $g+h$ au lieu de gh. L'élément neutre est alors noté 0 au lieu de e ; l'inverse de g est noté $-g$ et appelé opposé de g.

Exemples de groupes commutatifs

$(\mathbf{R}, +)$, $(\mathbf{C}, +)$, $(\mathbf{R}^*, .)$

Exemples de groupes non commutatifs

Le groupe $\mathcal{S}_3$ des permutations de $\{1, 2, 3\}$

Le groupe $GL(2, \mathbf{R})$ des matrices dans $M_2(\mathbf{R})$ inversibles.

Définition. *Soit G un groupe (noté multiplicativement). On dit que $H \subset G$ est un sous-groupe de G si*

(i) l'élément neutre e de G appartient à H ;

(ii) si h appartient à H, son inverse h^{-1} appartient aussi à H ;

(iii) si g et h appartiennent à H, leur produit gh appartient aussi à H.

Exemples de sous-groupes

$\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ est un sous-groupe de $\mathbf{R}$.

$SL(2, \mathbf{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in M_2(\mathbf{R}) : \det A = 1\} \subset GL(2, \mathbf{R})$ est un sous-groupe de $GL(2, \mathbf{R})$.

Définition. *Soit G_1, G_2 deux groupes et une application $f : G_1 \to G_2$. On dit que f est un morphisme (de groupes) si pour tous $x, y \in G_1$, $f(xy) = f(x)f(y)$.*

Proposition. *Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. Alors*

(i) $f(G_1)$ est un sous-groupe de G_2 ;

(ii) $\mathrm{Ker}(f) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(e_2)$, où e_2 est l'élément neutre de G_2, est un sous-groupe de G_1 ;

(iii) pour tout $g \in G_1$ et tout $h \in \mathrm{Ker}(f)$, $ghg^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$.

Définition. *On dit qu'un sous-groupe $N \subset G$ est normal (ou distingué) si pour tout $g \in G$ et tout $n \in N$, $gng^{-1} \in N$.*

Remarques

1) Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ d'un morphisme de groupes $f : G_1 \to G_2$ est donc un sous-groupe normal de G_1.

2) Si G est un groupe commutatif, tous ses sous-groupes sont normaux.

4. Actions de groupes

Notation. Etant donné un ensemble X, on note $\mathcal{S}(X)$ (ou $\mathrm{Bij}(X)$) l'ensemble des applications bijectives $\sigma : X \to X$. C'est un groupe pour la composition des applications.

Définition 1. *Soient G un groupe et X un ensemble. Une action du groupe G sur l'ensemble X est un morphisme de groupes $\Phi : G \to \mathcal{S}(X)$*

Définition 2. *Soient G un groupe et X un ensemble. Une action à gauche du groupe G sur l'ensemble X est une application*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

telle que

(i) Pour tout $x \in X$, on a $ex = x$.

(ii) Pour tous $g, h \in G$ et tout $x \in X$, on a $g(hx) = (gh)x$.

On a une définition analogue pour une action à droite du groupe G sur l'ensemble X.

Proposition. *Les définitions 1 et 2 sont équivalentes.*

La relation entre $\Phi : G \to \mathcal{S}(X)$ et $\varphi : G \times X \to X$ est $\Phi(g)(x) = \varphi(g, x)$.

Définition. *Soit $\Phi : G \to \mathcal{S}(X)$ une action d'un groupe G sur un ensemble X. On dit que l'action est*

(i) fidèle *si Φ est injective ;*

(ii) libre *si $gx = x \Rightarrow g = e$;*

(iii) transitive si pour tous $x, y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $y = gx$.

Proposition. *Soit $\varphi : G \times X \to X$ une action d'un groupe G sur un ensemble X. Alors la relation*

$$x \, R \, y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G : y = gx$$

est une relation d'équivalence sur X.

Définition. *Avec les notations de la proposition, on dit que R est la relation d'équivalence orbitale de l'action. On définit aussi*

(i) pour $x \in X$, la classe déquivalence $[x] = Gx$ de x, aussi appelée orbite de x ;

(ii) X/G (quelquefois noté $G\backslash X$ pour une action à gauche) comme l'ensemble quotient X/R, c'est-à-dire l'ensemble des orbites.

5. Espaces homogènes et groupes-quotient

Soit G un groupe. Etant donné un élément $a \in G$, on définit

(i) la translation à gauche

$$L_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & ax \end{array}$$

(ii) la translation à droite

$$R_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & xa \end{array}$$

Proposition. *Soit G un groupe et $a, b \in G$. Alors*

(i) L_a et R_b sont des bijections de G sur G ;

(ii) $L_a \circ L_b = L_{ab}, \quad R_a \circ R_b = R_{ba}, \quad L_a \circ R_b = R_b \circ L_a$.

Proposition.

(i) La translation à gauche $L : G \to \mathcal{S}(G)$ qui à $a \in G$ associe la translation à gauche L_a est une action de G sur G ;

(ii) Cette action est libre et transitive.

Corollaire. *Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe du groupe des bijections d'un ensemble.*

On voit en outre que si G est un groupe d'ordre n fini, alors G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.

On a vu que l'action de G sur G par translation à gauche est transitive : il y a une seule orbite. Ce n'est plus le cas si on restreint cette action à un sous-groupe H de G :

Définition. *Soit H un sous-groupe d'un groupe G.*

(i) On définit l'espace homogène $H\backslash G$ comme l'espace des orbites de l'action de H sur G par translation à gauche ;

(ii) On définit de même l'espace homogène G/H comme l'espace des orbites de l'action de H sur G par translation à droite.

Les éléments de $H\backslash G$, qui sont des orbites de l'action de H sur G, sont notés Hx, où $x \in G$. On a $Hx = Hy$ si et seulement si il existe $h \in H$ tel que $y = hx$. Ces éléments Hx sont aussi appelés classes à gauche. Les classes à gauche forment une partition de G. Les éléments de G/H sont notés xH, où $x \in G$ et appelés classes à droite. Ils forment eux-aussi une partition de G.

Proposition (formule de Lagrange). *Soit H un sous-groupe d'un groupe fini G. On a l'égalité*

$$|G/H| = |H\backslash G| = \frac{|G|}{|H|}$$

où $|X|$ est la cardinalité de X.

La cardinalité $|G|$ d'un groupe fini G est appelée l'ordre du groupe. La cardinalité de l'espace homogène G/H (ou $H\backslash G$) est appelée l'indice du sous-groupe H et elle est notée $[G : H]$.

Corollaire. *L'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre du groupe.*

Théorème. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G. Alors*
(i) $G/N = N\backslash G$;
(ii) il existe sur G/N une structure de groupe telle que pour tout $x, y \in G$, $(xN)(yN) = (xy)N$.

6. Actions transitives

On rappelle qu'une action d'un groupe G sur un ensemble X est dite transitive si il y a une seule orbite.

Proposition. *Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Alors*
(i) G agit par translation à gauche sur G/H ;
(ii) cette action est transitive.

Proposition. *Soit $\varphi : G \times X \to X$ une action d'un groupe G sur un ensemble X. On fixe $x \in X$. Alors*
(i) l'application $\varphi_x : G \to X$ qui envoie g sur gx a pour image l'orbite $[x] = Gx$ de x ;
(ii) $G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G : gx = x\}$ est un sous-groupe de G ;
(iii) l'application φ_x induit une bijection $\tilde{\varphi}_x : G/G(x) \to [x]$.

Definition. *Avec les notations de la proposition ci-dessus, le sous-groupe $G(x)$ s'appelle sous-groupe d'isotropie en x ou stabilisateur de x.*

Proposition. *Soit $\varphi : G \times X \to X$ une action transitive d'un groupe G sur un ensemble X. On fixe $x \in X$. Alors*

(i) l'application $\varphi_x : G \to X$ qui envoie g sur gx induit une bijection $\tilde{\varphi}_x : G/G(x) \to X$;

(ii) Cette bijection est équivariante : pour tous $g, h \in G$, on a

$$\tilde{\varphi}_x(g(hG(x))) = g\tilde{\varphi}_x(hG(x))$$

.

7. Groupes et combinatoire

On considère l'action d'un groupe fini G sur un ensemble fini X.

Le nombre d'éléments d'une orbite $[x]$ est donné par

$$|[x]| = \frac{|G|}{|G(x)|} \qquad \text{(formule de Lagrange)}$$

où $G(x) = \{g \in G : gx = x\}$.

Le nombre d'orbites est donné par

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| \qquad \text{(formule de Burnside)}$$

où $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$.