Université d'Orléans
Département de Mathématiques
18 Novembre 2013
L3MT12 Géométrie du plan et de l'espace

Examen Partiel

Documents et calculatrices interdits

Questions de cours :

1) Soit H un sous-groupe d'un groupe G.

a) Donner la définition de l'espace homogène G/H.

b) Sous quelle hypothèse peut-on munir G/H d'une structure de groupe ?

2) Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine.

a) Donner la définition d'un sous-espace affine de E.

b) Donner la forme de l'équation paramétrique d'un plan affine dans E.

Exercice 1

1) On fait agir le groupe diédral D_5 sur l'ensemble X des sommets d'un pentagone régulier. Cette action est-elle transitive ? Vérifier la formule de Lagrange pour cette action.

2) On considère maintenant l'action du sous-groupe C_5 des rotations de D_5 sur X. Cette action est-elle transitive ? Cette action est-elle libre ?

3) On considère enfin l'action du sous-groupe $\langle j \rangle$ engendré par la réflexion j par rapport à un axe de symétrie. Combien y-a-t-il d'orbites ? Vérifier la formule de Burnside pour cette action.

Exercice 2

1) Décrire tous les éléments du groupe D_4 des symétries d'un carré.

2) Combien y-a-t'il de manières de disposer 2 perles bleues et 2 perles rouges sur les sommets d'un carré, de sorte que chaque sommet reçoive une perle et une seule ?

3) Déterminer le nombre de colliers différents qui peuvent être faits avec 2 perles bleues et 2 perles rouges.

a) par inspection ;

b) en appliquant la formule de Burnside à l'action du groupe D_4 sur l'ensemble X des configurations de perles sur les sommets du carré.

T.S.V.P.

Exercice 3

Soit E un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. On considère les trois points $A = (1, -1, 1)$, $B = (0, 1, -1)$ et $C = (1, 3, 2)$.

1) Justifier qu'il existe un plan affine F et un seul contenant les points A, B et C.

2) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ du plan affine F.

Exercice 4

Soit E un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. Donner une équation cartésienne du plan d'équation paramétrique

$$\begin{aligned} x &= -2 + 3\lambda + \mu \\ y &= 1 + 2\lambda - \mu \\ z &= -1 + \lambda + 2\mu \end{aligned}$$

Exercice 5

Soit E un espace affine de dimension 3.

1) Montrer que l'intesection de deux plans affines de E est ou bien vide ou bien une droite affine ou bien un plan affine.

2) On considère les deux sous-ensembles F_1 et F_2 de E définis dans un repère affine $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ par :

$$F_1 = \{(x, y, z)_{\mathcal{R}} : x + y + z - 1 = 0\}$$

$$F_2 = \{(x, y, z)_{\mathcal{R}} : x - y + z - 1 = 0\}$$

Justifier que F_1 et F_2 sont des plans affines.

3) Montrer que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est une droite affine D.

4) Donner une équation paramétrique de D.

Exercice 6

Soient $(E, \vec{E})$ et $(F, \vec{F})$ deux espaces affines et $f : E \to F$ une application affine de partie linéaire $f^{\#} : \vec{E} \to \vec{F}$.

1) Montrer que si f est bijective, alors $f^{\#}$ est bijective ; montrer qu'alors, l'application réciproque f^{-1} est affine de partie linéaire $(f^{\#})^{-1}$.

2) Montrer que si $f^{\#}$ est bijective, alors f est bijective.