Examen partiel du 18 novembre 2013

Question de cours

1 a) L'espace homogène G/H est l'espace des orbites de l'action de H sur G par translation à droite :

$$x \sim y \iff \exists h \in H : \quad y = xh$$

b) Si le sous-groupe H est distingué (ie : $\forall g \in G$, $gH = Hg$) on peut munir G/H de la multiplication $(g_1H)(g_2H) = g_1g_2H$.
Alors G/H muni de cette multiplication est un groupe.

2 a) Soit E un espace affine dirigé par $\vec{E}$. On dit que $(F, \vec{F})$ où $F \subset E$ et $\vec{F}$ est un sev de $\vec{E}$ est un sous-espace affine de $(E, \vec{E})$ si

i) $P \in F$ et $\vec{a} \in \vec{F} \Rightarrow P + \vec{a} \in F$

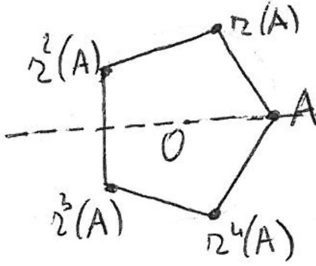
ii) $\forall (P,Q) \in F \times F$, $\cancel{\exists}$ $\overrightarrow{PQ} \in \vec{F}$.

b) Un plan affine est un sous-espace affine $(F, \vec{F})$ de dimension 2. Soit $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base de $\vec{F}$ et $A \in F$.
Alors $\mathcal{R} = (A; \mathcal{B})$ est un repère affine de $(F, \vec{F})$. Tout point P de F s'écrit de manière unique

$$P = A + x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{où } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

C'est l'équation paramétrique de F.

Exercice 1



1) L'orbite d'un sommet est X tout entier : par exemple $X = \{A, r(A), r^2(A), r^3(A), r^4(A)\}$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{5}$. L'action est donc transitive.

Soit A un sommet. A part l'application identique e, la réflexion j par rapport à la droite de symétrie passant par A laisse fixe A. Le stabilisateur de A est donc $G(A) = \{e, j\}$

La formule de Lagrange dit que

$$|X| = |[A]| = \frac{|G|}{|G(A)|} \quad \text{où } G = D_5$$

On a $|G| = 10$, $|G(A)| = 2$ et on trouve bien $|X| = 5$

2) On vient de voir que l'orbite d'un sommet A par les rotations de D_5 est X tout entier : l'action de C_5 est transitive. Elle est également libre :

$$r^k(A) = A \quad \text{ssi } k \equiv 0 \text{ modulo } 5$$

3) Soit j la réflexion par rapport à la droite de symétrie passant par A. Les orbites de $\langle j \rangle$ sont $\{A\}$, $\{r(A), r^4(A)\}$, $\{r^2(A), r^3(A)\}$

Appliquons la formule de Burnside au sous-groupe

$$\langle j \rangle = \{e, j\}$$

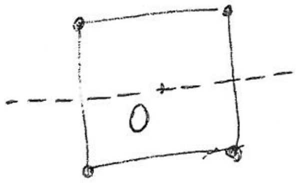
$Fix(e) = X$

$Fix(j) = \{A\}$

$$\frac{1}{|\langle j \rangle|}\left(|Fix(e)| + |Fix(j)|\right) = \frac{1}{2}(5+1) = 3$$

qui est bien le nombre d'orbites de $\langle j \rangle$.

Exercice 2



r = rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour du centre

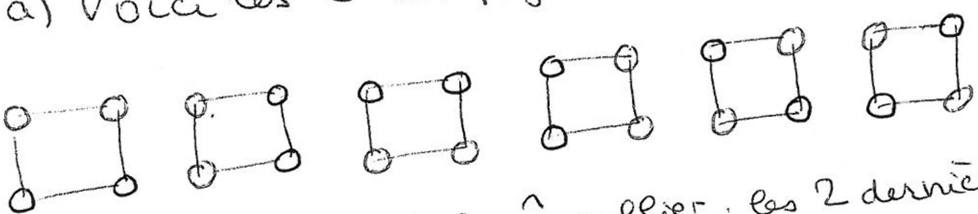
j = réflexion par rapport à l'axe Ox

1) $D_4 = \{e, r, r^2, r^3, j, jr, jr^2, jr^3\}$

2) Soit X l'ensemble de ces configurations de perles. Le groupe $\mathcal{S}_4$ agit transitivement sur X. Déterminons le stabilisateur d'un configuration ; on ne change pas la configuration en permutant deux perles bleues ou deux perles rouges. Le stabilisateur d'une configuration est donc $\mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2$. D'après le théorème de Lagrange, le nombre de configurations est

$$|X| = \frac{|\mathcal{S}_4|}{|\mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_2|} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

3) a) Voici les 6 configurations



les 4 premières donnent le m̂ collier ; les 2 dernières donnent le m̂ collier. Le nombre de colliers différents est donc 2 collier.

b) Deux configurations donnent le même collier si on passe de l'une à l'autre par une symétrie du carré. Le nombre de colliers est donc $|X/G|$ où $G = D_4$ agit sur X. La formule de Burnside est

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$$

. On a

g	e	r	r^2	r^3	j	jr	jr^2	jr^3
$\lvert\mathrm{Fix}(g)\rvert$	6	0	2	0	2	2	2	2

$\mathrm{Fix}(g) = \{x : gx = x\}$

D'où $|X/G| = \frac{1}{8}[6+2+2+2+2+2] = 2$

Exercice 3

1) On note que $\left(\vec{AB}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \vec{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\vec{E}$.

Elle engendre donc un plan vectoriel $\vec{F}=\mathrm{Vect}(\vec{AB},\vec{AC})$.

Le plan affine $F=A+\vec{F}$ contient à la fois $A=A+\vec{0}$,

$B=A+\vec{AB}$ et $C=A+\vec{AC}$.

Réciproquement, soit G un plan affine contenant A, B et C. Alors on a $G=A+\vec{G}$, $\vec{AB}\in\vec{G}$ et $\vec{AC}\in\vec{G}$.

On a donc $\vec{F}=\mathrm{Vect}(\vec{AB},\vec{AC})\subset\vec{G}$. Par l'égalité des dimensions,

$\vec{G}=\vec{F}$, d'où $G=F$.

2) Soit $P\in E$ de coordonnées (x,y,z). Alors $P\in F$ ssi

$\vec{AP}\in\vec{F}=\mathrm{Vect}(\vec{AB},\vec{AC})$ ssi la famille $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AP})$ n'est pas libre

ssi $\det_{\mathcal{B}}(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AP})=\begin{vmatrix}-1 & 0 & x-1\\-1 & 1 & y-2\\-1 & -2 & z-1\end{vmatrix}=0$

ssi $3(x-1)-2(y-2)-(z-1)=0$

ssi $3x-2y-z+2=0$

Exercice 4

L'équation donnée peut être écrite

$$P=A+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

où $P=(x,y,z)_{\mathcal{R}}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $A=(-2,1,-1)_{\mathcal{R}}$

cela est équivalent à $\vec{AP}\in\mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b})$

ou encore $\det_{\mathcal{B}}(\vec{a},\vec{b},\vec{AP})=0$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & x+2\\2 & -1 & y-1\\1 & 2 & z+1\end{vmatrix}=0$$

$$5(x+2)-5(y-1)-5(z+1)=0$$

$$x-y-z+2=0$$

ce qui est l'équation cartésienne cherchée.

Exercice 5

1) On étudie d'abord l'intersection de deux plans vectoriels $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ dans un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension 3.

Comme $\vec{F_1} \subset \vec{F_1}+\vec{F_2} \subset \vec{E}$, $\dim \vec{F_1} = 2 \leq \dim(\vec{F_1}+\vec{F_2}) \leq \dim \vec{E} = 3$

Si $\dim(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = 2$, $\vec{F_1}+\vec{F_2} = \vec{F_1} = \vec{F_2}$, donc $\vec{F_1}\cap\vec{F_2} = \vec{F_1} = \vec{F_2}$

Si $\dim(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = 3$, $\dim(\vec{F_1}\cap\vec{F_2}) = \dim\vec{F_1} + \dim\vec{F_2} - \dim(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = 1$

donc $\vec{F_1}\cap\vec{F_2}$ est une droite vectorielle.

Soient F_1 et F_2 deux plans affines dirigés respectivement par $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

Si $\dim(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = 2$, $\vec{F_1} = \vec{F_2}$. Ou bien F_1 et F_2 ont un point commun P et alors $F_1 = P + \vec{F_1} = P + \vec{F_2} = F_2$ et $F_1 \cap F_2 = F_1 = F_2$ est un plan affine. Ou bien $F_1 \cap F_2 = \emptyset$: F_1 et F_2 sont parallèles.

Si $\dim(\vec{F_1}+\vec{F_2}) = 3$, alors $\vec{E} = \vec{F_1}+\vec{F_2}$. On choisit $P_1 \in F_1$ et $P_2 \in F_2$ et on écrit $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in \vec{F_1}$ et $x_2 \in \vec{F_2}$.

Alors $P = P_1 + \vec{x}_1 = P_2 - \vec{x}_2 \in F_1 \cap F_2$.

L'intersection $F_1 \cap F_2$ est donc non vide. On sait qu'alors $F_1 \cap F_2$ est un espace affine dirigé par $\vec{F_1}\cap\vec{F_2}$. Comme $\vec{F_1}\cap\vec{F_2}$ est une droite vectorielle, $F_1 \cap F_2$ est une droite affine

2) On sait que, si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $ax+by+cz+d=0$ est l'équation cartésienne d'un plan affine. L'équation du plan vectoriel associé est $ax+by+cz=0$, ou encore $\operatorname{Ker} f$ où $f(x,y,z) = ax+by+cz$.

3) Comme les formes linéaires $f_1(x,y,z) = x+y+z$ et $f_2(x,y,z) = x-y+z$ ne sont pas proportionnelles, $\vec{F_1} \neq \vec{F_2}$. D'après la question 1, $F_1 \cap F_2$ est une droite affine D

4) Il suffit de connaître un point de D et un vecteur de $\vec{D}$.

On peut prendre $P = (1,0,0)_{\mathcal{R}}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. En effet

l'équation $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 2x - 2z$ montre que

$f_1(2,0,-2) = f_2(2,0,-2) = 0$

Exercice 6

1) f bijective $\Rightarrow f^{\#}$ bijective

On va montrer f injective $\Rightarrow f^{\#}$ injective et f surjective $\Rightarrow f^{\#}$ surjective

On suppose f injective. Soit $\vec{a} \in \vec{E}$ tel que $f^{\#}(\vec{a}) = \vec{0}$

On écrit $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$. On a $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = f^{\#}(\overrightarrow{PQ}) = \vec{0}$. Donc $f(P) = f(Q)$ et $P = Q$

Donc $\vec{a} = \vec{0}$. On a montré que $\operatorname{Ker} f^{\#} = \{\vec{0}\}$, donc $f^{\#}$ est injective

On suppose f surjective. Soit $\vec{b} \in \vec{F}$. On écrit $\vec{b} = \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{f(P)f(Q')}$

(car P', Q' peuvent être écrits $f(P)$, $f(Q)$). Donc $\vec{b} = f^{\#}(\overrightarrow{PQ})$. On a montré que $f^{\#}$ est surjective.

2) $f^{\#}$ bijective $\Rightarrow f$ bijective.

On fixe $A \in E$. Soit $B = f(A) \in F$.

On définit $g : F \to E$ par $g(B + \vec{b}) = A + (f^{\#})^{-1}(\vec{b})$

On vérifie que $g = f^{-1}$ cad $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$

$f \circ g(B + \vec{b}) = f(A + (f^{\#})^{-1}\vec{b}) = f(A) + f^{\#} \circ (f^{\#})^{-1}(\vec{b}) = B + \vec{b}$

$g \circ f(A + \vec{a}) = g(f(A) + f^{\#}(\vec{a})) = g(B + f^{\#}(\vec{a})) = A + \vec{a}$

Ceci montre que f est bijective avec $f^{-1} = g$ affine et

$g^{\#} = (f^{\#})^{-1}$.

Autre méthode

En choisissant une origine O dans E et O' dans F, on identifie E à $\vec{E}$ et F à $\vec{F}$. Alors tout application affine

$f : \vec{E} \to \vec{F}$ peut être écrite $f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$ où

$A \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ et $\vec{b} \in \vec{F}$. Alors $f^{\#} = A$

On a $f = \tau_{\vec{b}} \circ A$ où $\tau_{\vec{b}} : \vec{F} \to \vec{F}$ est la translation de vecteur $\vec{b}$. Comme $\tau_{\vec{b}}$ est bijective, f est bijective ssi $A = f^{\#}$ est bijective. On a alors $f^{-1} = A^{-1} \circ \tau_{-\vec{b}}$, ce

c.a.d $f^{-1}(\vec{y}) = A^{-1}(\vec{y} - \vec{b}) = A^{-1}\vec{y} - A^{-1}\vec{b}$, ce qui montre que f^{-1} est affine avec $(f^{-1})^{\#} = A^{-1}$.