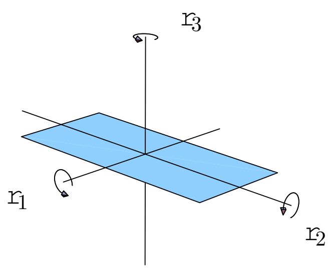
Université d'Orléans 18 Juin 2013
Département de Mathématiques
L3MT12 : Géométrie du plan et de l'espace

Examen
Documents et calculatrices interdits

Questions de cours :
1) Soit E un espace affine dirigé par un espace vectoriel $\vec{E}$, I un ensemble d'indices, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de E et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires. Donner une caractérisation du barycentre G de la famille de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$.
2) Soit $(E, \vec{E})$ et $(F, \vec{F})$ deux espaces affines. Quand dit-on qu'une application $f : E \to F$ est affine ?

Exercice 1
1) Ecrire la table de multiplication du groupe cyclique $C_4 = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$.
2) Ecrire la table de multiplication du groupe des symétries de rotation du rectangle $\mathbf{V} = \{e, r_1, r_2, r_3\}$.



3) Montrer que C_4 et $\mathbf{V}$ sont deux groupes abéliens d'ordre 4 non isomorphes.

Exercice 2
Soit E un plan affine muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$.
1) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite D passant par $A = (1,1)$ et $B = (2,-1)$.
2) Donner une équation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite Δ passant par $C = (-2,1)$ et $D = (2,3)$.
3) Justifier que l'intersection de D et Δ a un point et un seul. Donner les coordonnées de ce point.

T.S.V.P.

Exercice 3
Soit E un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. On considère les trois points $A = (1,4,2)$, $B = (3,1,1)$ et $C = (2,2,3)$.
1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Quelle est la dimension du sous-espace affine F engendré par les points A, B et C ?
3) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ du sous-espace affine F.

Exercice 4
Soient A, B et C des points d'un espace affine E.
On considère l'application $f : E \to E$ qui à tout point $M \in E$ associe $f(M) = M' \in E$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

1) Montrer que f est une application affine. Quelle est sa partie linéaire $f^{\#}$?
2) Montrer que f est une homothétie. Préciser le rapport d'homothétie et le centre de f.

Exercice 5
Etant donnés $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, on considère l'équation

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 \qquad \text{(E)}$$

1) Montrer que $z_1 = 1, z_2 = j, z_3 = j^2$ (racines cubiques de l'unité) vérifient (E).
2) Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une application affine de la forme $f(z) = az + b$ où $a, b \in \mathbf{C}$. Montrer que si z_1, z_2, z_3 vérifient (E), alors $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ vérifient aussi (E).
3) Soient z_1, z_2, z_3 les affixes des sommets d'un triangle équilatéral parcourus dans le sens trigonométrique. Montrer qu'il existe une application affine de la forme $f(z) = az + b$ telle que $f(1) = z_1, f(j) = z_2, f(j^2) = z_3$. Donner une interprétation géométrique de b. En déduire que les affixes des sommets d'un triangle équilatéral vérifient (E).
4) Réciproquement, on suppose que les affixes z_1, z_2, z_3 des sommets d'un triangle vérifient (E).
a) Montrer que j ou $\overline{j}$ sont solutions de l'équation

$$z_1 z^2 + z_2 z + z_3 = 0 \qquad \text{(E')}$$

Indication : développer $(z_1 j^2 + z_2 j + z_3)(z_1 \overline{j}^2 + z_2 \overline{j} + z_3)$.
b) En déduire que $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$.
c) Que pouvez-vous conclure ?