Université d'Orléans 20 Décembre 2013
Département de Mathématiques
L3MT12 Géométrie du plan et de l'espace

Examen
Documents et calculatrices interdits

Questions de cours

1) Soit $(E, \vec{E})$ et $(F, \vec{F})$ deux espaces affines. Quand dit-on qu'une application $f : E \to F$ est affine ?

2) Soit E un espace affine dirigé par un espace vectoriel $\vec{E}$, I un ensemble fini d'indices, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de E et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires de somme non nulle. Donner une caractérisation du barycentre G de la famille de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$.

Exercice 1

On utilise la représentation complexe du plan. On note A, B, C, D les points d'affixes respectives $1, i, -1, -i$. On note R la rotation $z \mapsto iz$ et J la reflexion $z \mapsto \overline{z}$.

1) Enumérer toutes les isométries du plan qui envoient $\{A, B, C, D\}$ sur lui-même. Montrer qu'elles sont ou bien de la forme R^k ou bien de la forme $R^k J$, avec $k = 0, 1, 2, 3$.

2) On note D_4 l'ensemble de ces isométries. Justifier sans calcul que D_4 est un groupe pour la composition.

3) Montrer que le sous-groupe $\langle R \rangle$ engendré par R est isomorphe au groupe C_4 des racines 4-ièmes de l'unité.

4) Montrer que $JRJ = R^3$. En déduire que $\langle R \rangle$ est un sous-groupe distingué.

5)(*Facultatif*) Montrer que le groupe D_4 est isomorphe à un produit semi-direct $C_4 \ltimes_\alpha \mathbf{Z}_2$ où on précisera l'action de $\mathbf{Z}_2$ sur C_4.

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$.

1) Montrer que les trois points $A = (1, 2, 1)$, $B = (3, 1, 2)$ et $C = (2, 1, 1)$ engendrent un plan affine $\mathcal{F}$. Donner l'équation cartésienne de ce plan.

2) Donner une équation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite Δ passant par $D = (1, 1, 1)$ et $E = (2, 3, 2)$.

3) Justifier que l'intersection de $\mathcal{F}$ et Δ a un point et un seul. Donner les coordonnées de ce point.

Exercice 3 T.S.V.P.

Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine E.
1) Montrer que $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\mathcal{R}' = (B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ sont des repères affines de E.
2) Soient (x, y) les coordonnées d'un point P dans le repère $\mathcal{R}$ et (x', y') ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$. Calculer x' et y' en fonction de x et y.
3) Donner une description de l'ensemble des points de E dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont les mêmes.

Exercice 4
On se donne six points A, B, C, A', B', C' d'un espace affine. On désigne par G [respectivement G'] l'isobarycentre de (A, B, C) [respectivement (A', B', C')] et par D, E, F les isobarycentres respectifs de (A', B, C), (A, B', C) et (A, B, C'). On considère enfin H isobarycentre de (D, E, F). Montrer que $\overrightarrow{HG'} = -2\overrightarrow{HG}$.

Exercice 5
Soient A, B et C trois points distincts d'un espace affine $(E, \vec{E})$. On désigne par f l'application de E dans lui-même qui au point M associe le point M' barycentre de $((A, 1), (B, -1), (C, 1), (M, 1))$
1) Montrer que f est une application affine en déterminant l'application linéaire associée.
2) Montrer que f est une homothétie. Déterminer son rapport d'homothétie et son centre.

Exercice 6
Etant donnés $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, on considère la relation

$$(E) \qquad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

1) Montrer que $z_1 = 1, z_2 = j, z_3 = j^2$ (racines cubiques de l'unité) vérifient (E).
2) Soit $f(z) = az + b$ (où $a, b \in \mathbf{C}$) une similitude directe. Montrer que si z_1, z_2, z_3 vérifient (E), alors $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ vérifient aussi (E).
3) Soient z_1, z_2, z_3 les affixes des sommets d'un triangle équilatéral parcourus dans le sens trigonométrique. Montrer qu'il existe une similitude directe $f(z) = az + b$ telle que $f(1) = z_1, f(j) = z_2, f(j^2) = z_3$. Donner une interprétation géométrique de b. En déduire que les affixes des sommets d'un triangle équilatéral vérifient (E).
4) Réciproquement, on suppose que les affixes z_1, z_2, z_3 des sommets d'un triangle vérifient (E).

a) Montrer que j ou $\bar{j}$ est solution de l'équation

$$z_1 z^2 + z_2 z + z_3 = 0$$

Indication : développer $(z_1 j^2 + z_2 j + z_3)(z_1 \bar{j}^2 + z_2 \bar{j} + z_3)$.

b) En déduire que $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3|$.

c) Que pouvez-vous conclure ?