Université d'Orléans
Département de Mathématiques
7 Janvier 2013
L3MT12 Géométrie du plan et de l'espace

**Examen**

*Documents et calculatrices interdits*

**Questions de cours :**

1) Donner la définition d'un espace affine $E$ dirigé par un espace vectoriel $\vec{E}$.

2) Donner la définition d'une partie convexe $K$ d'un espace affine $(E, \vec{E})$.

**Exercice 1**

On dit que $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ est une application affine s'il existe une application linéaire $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbf{R}^n$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^m$, $f(x) = Ax + b$. On dit que $A$ est la partie linéaire de $f$.

1) Soient $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ et $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ des applications affines. Montrer que $g \circ f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ est une application affine.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application affine $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ soit bijective. Montrer qu'alors $f^{-1}$ est une application affine.

3) Montrer que l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même est un groupe $G$ pour la composition des applications.

4) Montrer que l'application qui à $f \in G$ associe sa partie linéaire est un morphisme du groupe $G$ sur le groupe $GL(n, \mathbf{R})$ des applications linéaires inversibles de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même. Quel est son noyau ?

**Exercice 2**

Soit $E$ un plan affine muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$.

1) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite $D$ passant par $A = (2, 1)$ et $B = (1, 2)$.

2) Donner une équation paramétrique dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite $\Delta$ passant par $C = (-2, -1)$ et $D = (-1, 1)$.

3) Justifier que l'intersection de $D$ et $\Delta$ a un point et un seul. Donner les coordonnées de ce point.

T.S.V.P.

**Exercice 3**

Soit $E$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. On considère les trois points $A = (1, 2, 4)$, $B = (1, 3, 3)$ et $C = (2, 2, 3)$.

1) Justifier qu'il existe un plan affine $F$ et un seul contenant les points $A$, $B$ et $C$.

2) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ du plan affine $F$.

**Exercice 4**

Soient $A, B$ et $C$ des points d'un espace affine $E$.

1) Préciser la nature de l'application $f$ qui à tout point $M \in E$ associe $M' \in E$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

2) Préciser la nature de l'application $g$ qui à tout point $M \in E$ associe $M' \in E$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

**Exercice 5**

Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine.

1) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ des points de $E$. Montrer que $(A_1, \dots, A_n)$ et $(B_1, \dots, B_n)$ ont même isobarycentre si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_i B_i} = \vec{0}.$$

2) Soient $A, B, C, D$ quatre points de $E$. On dit que $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Montrer **en utilisant la question 1** que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

3) Montrer **en utilisant la question 2** que l'image d'un parallélogramme par une application affine est un parallélogramme.

**Exercice 6**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1. On note $C_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les nombres complexes $z$ tels que $z^n = 1$.

1) Montrer que $C_n$ est un groupe pour la multiplication. Quel est son ordre ?

2) On se place dans $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure affine canonique et on utilise la bijection canonique entre $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ qui au point $A = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ associe son affixe $a + ib \in \mathbf{C}$. Donner l'affixe de l'isobarycentre des racines $n$-ièmes de l'unité.