Licence de Mathématiques

Module MA5.06

GEOMETRIE

Jean-François Havet

Université d'Orléans, Département de Mathématiques
B.P. 6759, 45067 ORLEANS Cedex 2, France

Septembre 2003

Table des matières

Chapitre I : Géométrie vectorielle

1 Dualité

Dans toute cette partie K désignera un corps commutatif.

1.1. Espace dual

1.1.1. Rappels .

- Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E. On dit que G est un *supplémentaire* de F dans E si $E = F \oplus G$.

- *Tout sous-espace vectoriel admet au moins un supplémentaire.*
  Ce résultat est une conséquence du théorème de la base incomplète. Si E n'est pas de dimension finie, il fait appel à l'axiome de Zorn. (cf MA5.04 Chap. I).

- *Soient E et F des K-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si G est un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}\,(f)$ *dans E alors f définit par restriction un isomorphisme entre G et* $\mathrm{Im}\,(f)$.

  Pour tout $y \in G$, posons $g(y) = f(y)$. On définit ainsi une application linéaire g de G dans $\mathrm{Im}\,(f)$. Montrons qu'elle est bijective. Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(g)$. On a $0 = g(y) = f(y)$. Donc y appartient à $\mathrm{Ker}\,(f)$ et comme $G \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$, on en déduit que $y = 0$ et que g est injective. Soit $z \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Décomposons x en $y' + y$ avec $y' \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $y \in G$. On a alors $z = f(x) = f(y' + y) = f(y) = g(y)$. Par conséquent z appartient à $\mathrm{Im}\,(g)$ et g est surjective.

1.1.2. Définition . Soit E un K-espace vectoriel. On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans K.

1.1.3. Exemples .

a) Si $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, l'application $f \longmapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.

b) Si $E = K[X]$, pour tout $a \in K$, l'application $P \longmapsto P(a)$ est une forme linéaire sur E.

c) La trace est une forme linéaire sur $\boldsymbol{M}_n(K)$.

d) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1\cdots n}$ une base de E. Pour tout $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, l'application $e_j^* : x \longmapsto \lambda_j$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ est une forme linéaire sur E, appelée $j^{\text{ème}}$-*forme coordonnée* relative à la base $\mathcal{B}$.

1.1.4. Définitions. Soit E un K-espace vectoriel. On appelle *espace dual* de E, noté E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. On appelle *espace bidual* de E, noté E^{**}, l'espace dual de E^*. On a donc $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ et $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, K)$.

1.1.5. Lemme. *Soient v un vecteur non nul d'un espace vectoriel E et H un supplémentaire dans E de la droite D engendrée par v. Alors il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(v) = 1$ et $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = H$.*

Preuve. Par hypothèse on a $E = H \oplus D$. Soit p la projection sur D parallèlement à H. Pour tout $x \in E$, le vecteur $p(x)$ appartient à D et il existe un unique scalaire noté $\varphi(x)$ tel que $p(x) = \varphi(x)\, v$. On a $p(v) = v$, donc $\varphi(v) = 1$. Montrons que l'application φ est linéaire. Pour tous x et y dans E, tous λ et μ dans K on a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x + \mu y)\, v &= p(\lambda x + \mu y)\\ &= \lambda p(x) + \mu p(y)\\ &= \lambda(\varphi(x)v) + \mu(\varphi(y)v)\\ &= (\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y))v\ .\end{aligned}$$

Comme v est non nul, on a donc $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$. D'où φ est une forme linéaire sur E.
De plus $x \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ si et seulement si $p(x) = 0$, c'est à dire si $x \in \mathrm{Ker}\,(p) = H$. ■

1.1.6. Corollaire. *Soit E un K-espace vectoriel.*

(*i*) *Pour tout $x \in E$, l'application, notée $j_E(x)$, qui à tout $\varphi \in E^*$, associe $\varphi(x)$, est une forme linéaire sur E^*. (Pour tous $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ on a : $j_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$).*

(*ii*) *L'application j_E de E dans son bidual E^{**}, est une application linéaire injective.*

Preuve. La vérification de l'assertion (i) et du caractère linéaire de j_E est immédiate. Montrons que j_E est injective. Soit v non nul dans E. La droite vectorielle engendrée par v admet un supplémentaire dans E. D'après le lemme précédent, il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(v) = 1$. Donc $j_E(v)(\varphi) = 1 \neq 0$ et v n'appartient pas à $\mathrm{Ker}\,(j_E)$. Il en résulte que $\mathrm{Ker}\,(j_E) = \{0\}$. ■

1.1.7. Définition. L'application linéaire j_E, définie dans le corollaire précédent, est appelée *injection canonique* de E dans son bidual.

1.1.8. Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors*

(*i*) *son dual E^* est de dimension finie et $\dim(E^*) = \dim(E)$;*

(*ii*) *l'injection canonique j_E est un isomorphisme de E dans E^{**}.*

Preuve. (i) Rappelons que si E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$. Il suffit d'appliquer ce résultat avec $F = K$.
(ii) On a $\dim(E^{**}) = \dim(E^*) = \dim(E)$. L'application linéaire j_E étant injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, est un isomorphisme. ∎

1.2. Hyperplan

1.2.1. Remarque. *Toute forme linéaire φ non nulle est surjective.*
En effet $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de K qui est un espace vectoriel de dimension 1.

Intéressons-nous maintenant au noyau d'une forme linéaire.

1.2.2. Proposition. *Soient E un K-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *Il existe $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ tel que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. ($H$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E).*

(*ii*) *$H \neq E$ et pour tout $v \notin H$ on a $E = H \oplus Kv$.*

(*iii*) *H admet une droite pour supplémentaire dans E.*

Si E est de dimension finie, les conditions précédentes sont équivalentes à

(*iv*) $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Comme φ est non nulle, H est distinct de E. Si v est un vecteur n'appartenant pas à H, il existe G supplémentaire de H dans E contenant v. D'après 1.1.1, G est isomorphe à $\mathrm{Im}\,(\varphi) = K$. Donc $\dim(G) = 1$ et G est la droite vectorielle Kv.
L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est immédiate.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Soient D une droite telle que $E = H \oplus D$ et v une base de D. D'après le lemme 1.1.5, il existe φ forme linéaire non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$.
Si E est de dimension finie, il est clair que les assertions (iii) et (iv) sont équivalentes. ∎

1.2.3. Définition. On appelle *hyperplan (vectoriel)* de E, tout sous-espace vectoriel de E pour lequel les propriétés équivalentes du théorème précédent sont vérifiées.

1.2.4. Corollaire. *Deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau.*

Preuve. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles. Supposons que φ et ψ ont même noyau H. Soit v un vecteur n'appartenant pas à H. Posons $\alpha = \dfrac{\psi(v)}{\varphi(v)}$ et montrons que $\psi = \alpha\varphi$.

D'après la proposition précédente $E = H \oplus Kv$ et tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire $x = h + \lambda v$ avec $h \in H$ et $\lambda \in K$.
D'où $\psi(x) = \psi(h) + \lambda\psi(v) = \lambda\psi(v)$ et $\alpha\varphi(x) = \alpha\varphi(h) + \alpha\lambda\varphi(v) = \lambda\psi(v)$. Donc φ et ψ sont proportionnelles.
La réciproque est immédiate. ∎

1.2.5. Remarque. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Relativement à une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1\cdots n}$, un hyperplan H de E admet une équation unique, à un scalaire multiplicatif non nul près, de la forme :* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

1.3. Base duale

1.3.1. Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1\cdots n}$ est une base de E, la famille des formes coordonnées $B^* = (e_i^*)_{i=1\cdots n}$ est une base du dual E^*. De plus $e_i^*(e_j) = \delta_{i\,j}$ (symbole de Kronecker) pour tous i et j dans $[1,n]_{\mathbb{N}}$.*

Preuve. D'après la définition des e_i^*, on a $e_i^*(e_j) = \delta_{i\,j}$ pour tous i et j dans $[1,n]_{\mathbb{N}}$.
Soit $f \in E^*$. Considérons la forme linéaire $\varphi = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$. Pour tout j on a
$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\delta_{i\,j} = f(e_j)$.
Les formes linéaires φ et f coïncidant sur une base de E sont égales. Par conséquent la famille $(e_i^*)_{i=1\cdots n}$ est génératrice dans E^* ; comme elle comporte n vecteurs dans l'espace vectoriel dual E^* de dimension n, c'est une base de E^*. ∎

1.3.2. Définition. La base $\mathcal{B}^*$ de E^* définie dans la proposition précédente est appelée *base duale* de la base $\mathcal{B}$ de E.

1.3.3. Remarque. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1\cdots n}$ une base de E et $B^* = (e_i^*)_{i=1\cdots n}$ sa base duale. Alors

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i \quad \text{et} \quad \forall f \in E^* \quad f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^* \ .$$

$$\forall T \in \mathcal{L}(E) \quad a_{i\,j} = e_i^*(T(e_j)) \quad \text{avec} \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) \ .$$

1.3.4. Proposition. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $(e_i)_{i=1\cdots n}$ une famille de n vecteurs de E et $(f_j)_{j=1\cdots n}$ une famille de n formes linéaires de E^*. Si pour tous i et j de $[1,n]_{\mathbb{N}}$ on a $f_j(e_i) = \delta_{i\,j}$, alors $(e_i)_{i=1\cdots n}$ est une base de E et $(f_j)_{j=1\cdots n}$ est sa base duale.*

Preuve. Montrons que la famille $(e_i)_{i=1\cdots n}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i=1\cdots n}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Alors pour tout j on a :

$$0 = f_j\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_j(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i\,j} = \lambda_j \ .$$

Comme $\dim(E) = n$, la famille $(e_i)_{i=1\cdots n}$ est une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $\mathcal{B}^* = (e_j^*)_{j=1\cdots n}$ sa base duale. Pour tout $j \in [1,n]_{\mathbb{N}}$ les formes linéaires e_j^* et f_j coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de E, puisque $f_j(e_i) = \delta_{i\,j} = e_j^*(e_i)$, et par conséquent sont égales. ∎

1.3.5. Corollaire. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute base du dual est une base duale : Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E^*, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}'$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{B}' = (f_j)_{j=1\cdots n}$ une base de E^*. Considérons $\mathcal{B}'^* = (f_j^*)_{j=1\cdots n}$ sa base duale. C'est une base de E^{**}. Grâce à l'isomorphisme j_E (Théorème 1.1.8), on obtient une base $\mathcal{B} = (e_j)_{j=1\cdots n}$ de E telle que $j_E(e_j) = f_j^*$. Pour tous i et j dans $[1,n]_{\mathbb{N}}$ on a alors $f_j(e_i) = j_E(e_i)(f_j) = f_i^*(f_j) = \delta_{i\,j}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente pour conclure. ∎

1.3.6. Corollaire. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*

(*i*) *Soit $p \in [1,n]_{\mathbb{N}}$. Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-p$ peut être considéré comme l'intersection de p hyperplans de E.*

(*ii*) *Considérons $(\varphi_i)_{i=1\cdots p}$, une famille de p formes linéaires non nulles de E^* et posons* $G = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(\varphi_i)$.
Alors $\dim(G) = n - \dim(\mathrm{Vect}\{\,\varphi_1,\ \ldots,\varphi_p\,\})$.
En particulier G est un sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ si et seulement si la famille $(\varphi_i)_{i=1\cdots p}$ est libre dans E^*.

Preuve. (i) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-p$. Soit $(e_i)_{i=1\cdots n-p}$ une base de F que l'on complète pour obtenir $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1\cdots n}$, base de E. Soit $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i=1\cdots n}$ la base duale de $\mathcal{B}$. Alors $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}\,(e_i^*)$.
(ii) Supposons tout d'abord que la famille $(\varphi_i)_{i=1\cdots p}$ est libre. Nous pouvons la compléter pour obtenir une base $\mathcal{B}' = (\varphi_i)_{i=1\cdots n}$ de E^*. Soit $(e_i)_{i=1\cdots n}$ la base de E dont $\mathcal{B}'$ est la base duale. On a alors :

$$G = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(e_i^*) = \mathrm{Vect}\{\,e_{p+1},\ \ldots,e_n\,\}\,.$$

Donc $\dim(G) = n - p$.
Supposons maintenant que la famille $(\varphi_i)_{i=1\cdots p}$ est liée. Posons $\Phi = \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$ et $d = \dim(\Phi)$. De la famille $(\varphi_i)_{i=1\cdots p}$, génératrice de Φ, nous pouvons extraire une base. Quitte à renuméroter, nous pouvons supposer que $(\varphi_i)_{i=1\cdots d}$ est une base de Φ.

Soit $j \in [d+1, p]_{\mathbb{N}}$. Il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ dans K tels que $\varphi_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \varphi_i$. Donc, si x appartient à $\bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ on a $\varphi_j(x) = 0$. Il en résulte que $\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{d} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.
En appliquant à la famille libre $(\varphi_i)_{i=1\cdots d}$ le résultat obtenu précédemment, on a donc $\dim(G) = n - d$. ■

1.3.7. Exemple. Dans un espace vectoriel de dimension 3, toute droite vectorielle D est l'intersection de deux plans vectoriels distincts. Si (e_1, e_2, e_3) est une base de E, alors D admet dans cette base une équation de la forme : $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \end{cases}$ avec (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) non colinéaires dans K^3.

1.3.8. Théorème d'interpolation de Lagrange. *Soient $(a_i)_{i=1\cdots n}$ et $(\lambda_i)_{i=1\cdots n}$ deux familles de n scalaires de K. On suppose les a_i deux à deux distincts. Alors il existe un unique polynôme $P \in K[X]$ avec $d^\circ(P) \leq n-1$ tel que $P(a_i) = \lambda_i$.*

Preuve. Soit Θ l'application qui à $P \in K_{n-1}[X]$ associe $(P(a_i))_{i=1\cdots n} \in K^n$. Cette application est linéaire ; montrons qu'elle est injective. Soit $Q \in \mathrm{Ker}(\Theta)$. On a alors $Q(a_i) = 0$ pour tout $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ et Q admet n racines distinctes ; comme il est de degré au plus $n-1$, c'est donc le polynôme nul.
De plus comme $\dim(K_{n-1}[X]) = n = \dim(K^n)$, l'application Θ est un isomorphisme. D'où, pour toute famille $(\lambda_i)_{i=1\cdots n} \in K^n$, l'existence et l'unicité d'un polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = \lambda_i$, à savoir $P = \Theta^{-1}((\lambda_i))$. ■

1.3.9. Remarque. Reprenons les données du théorème précédent. Soit $(e_i)_{i=1\cdots n}$ la base canonique de K^n. Pour tout i, posons $L_i = \Theta^{-1}(e_i)$. La famille $(L_i)_{i=1\cdots n}$ est une base de $K_{n-1}[X]$; sa base duale est $(e_i^* \circ \Theta)_{i=1\cdots n}$ i.e. la famille des formes linéaires φ_i telles $\varphi_i(P) = P(a_i)$.
Déterminons les polynômes L_i. Pour tout i, le polynôme L_i est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et satisfait à $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. D'où a_j est racine de L_i pour $j \neq i$ et $\prod_{j \neq i} (X - a_j)$ polynôme de degré $n-1$ divise donc L_i. Il en résulte que $L_i(X) = k \prod_{j \neq i} (X - a_j)$, avec $k \in K$. La condition $L_i(a_i) = 1$ permet de déterminer k et on a $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \dfrac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)}$.

2 Espace Hermitien

Dans toute cette partie le corps de base sera $\mathbb{C}$.

2.1. Produit hermitien

2.1.1. Définitions. Soient E et F des espaces vectoriels complexes. Une application f de E dans F est dite *semi-linéaire* si :
$\forall x, y \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$.
Une application g de $E \times E$ dans F est dite *sesquilinéaire* si pour tout $x \in E$ l'application $y \longmapsto g(x, y)$ est linéaire, et pour tout $y \in E$ l'application $x \longmapsto g(x, y)$ est semi-linéaire.
On appelle *produit hermitien* ou *produit scalaire hermitien* sur E, toute application sesquilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, notée $(x, y) \longmapsto \langle\, x\,,\, y\,\rangle$, telle que :

- $\forall x, y \in E \quad \langle\, y\,,\, x\,\rangle = \overline{\langle\, x\,,\, y\,\rangle}$ (symétrie hermitienne).
- $\forall x \in E \quad \langle\, x\,,\, x\,\rangle$ appartient à $\mathbb{R}^+$.
- $\forall x \in E \quad \langle\, x\,,\, x\,\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

On dit qu'un espace vectoriel complexe E est un *espace préhilbertien complexe* s'il est muni d'un produit hermitien. On appelle *espace hermitien* tout espace préhilbertien complexe de dimension finie.

2.1.2. Exemples.

a) $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$, avec $a < b$, est un espace préhilbertien complexe pour le produit hermitien défini par : $\langle\, f\,,\, g\,\rangle = \displaystyle\int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$.

b) $\mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien usuel $\langle\, x\,,\, y\,\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ est un espace hermitien.

c) $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ muni de $\langle\, M\,,\, N\,\rangle = \mathrm{Tr}(M^* N)$ est un espace hermitien, où M^* désigne la matrice *transposée conjuguée* de M ($M^*_{ij} = \overline{M_{ji}}$ pour tous i et j de $[1, n]_{\mathbb{N}}$).

d) $\mathbb{C}_n[X]$ muni de $\langle\, P\,,\, Q\,\rangle = \displaystyle\int_a^b \overline{P(t)} Q(t) dt$ est un espace hermitien.

2.1.3. Proposition. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une forme sesquilinéaire. Pour tous x et y dans E on a la formule de polarisation :*

$$\langle\, x\,,\, y\,\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \langle\, i^k x + y\,,\, i^k x + y\,\rangle\ .$$

Si de plus $\langle\ ,\ \rangle$ posède la symétrie hermitienne alors

$$\langle\, x+y\,,\, x+y\,\rangle = \langle\, x\,,\, x\,\rangle + \langle\, y\,,\, y\,\rangle + 2\,\mathfrak{Re}\,(\langle\, x\,,\, y\,\rangle)\ .$$

Preuve. Posons $A = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle\, i^k x + y\,,\, i^k x + y\,\rangle$. Alors

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{3} i^k \Big(\langle\, i^k x\,,\, i^k x\,\rangle + \langle\, i^k x\,,\, y\,\rangle + \langle\, y\,,\, i^k x\,\rangle + \langle\, y\,,\, y\,\rangle \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{3} i^k \Big((-i)^k i^k \langle\, x\,,\, x\,\rangle + (-i)^k \langle\, x\,,\, y\,\rangle + i^k \langle\, y\,,\, x\,\rangle + \langle\, y\,,\, y\,\rangle \Big) \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{3} i^k \Big) \langle\, x\,,\, x\,\rangle + \sum_{k=0}^{3} \langle\, x\,,\, y\,\rangle + \Big(\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \Big) \langle\, y\,,\, x\,\rangle + \Big(\sum_{k=0}^{3} i^k \Big) \langle\, y\,,\, y\,\rangle \\
&= 4\,\langle\, x\,,\, y\,\rangle\ .
\end{aligned}$$

$\langle\, x+y\,,\, x+y\,\rangle = \langle\, x\,,\, x\,\rangle + \langle\, x\,,\, y\,\rangle + \langle\, y\,,\, x\,\rangle + \langle\, y\,,\, y\,\rangle = \langle\, x\,,\, x\,\rangle + 2\,\mathfrak{Re}\,(\langle\, x\,,\, y\,\rangle) + \langle\, y\,,\, y\,\rangle$. ∎

2.1.4. Corollaire. *Si des formes sesquilinéaires $\langle\ ,\ \rangle_1$ et $\langle\ ,\ \rangle_2$, sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E satisfont à $\forall x \in E \quad \langle\, x\,,\, x\,\rangle_1 = \langle\, x\,,\, x\,\rangle_2$, alors $\langle\ ,\ \rangle_1 = \langle\ ,\ \rangle_2$.*

Preuve. Immédiat d'après la formule de polarisation. ∎

2.1.5. Théorème. **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien complexe $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors*

(*i*) $\quad |\langle\, x\,,\, y\,\rangle| \le \langle\, x\,,\, x\,\rangle^{\frac12}\, \langle\, y\,,\, y\,\rangle^{\frac12}$;

(*ii*) *l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont liés.*

Preuve. (i) Si $\langle\, x\,,\, y\,\rangle = 0$ l'inégalité est triviale. Sinon écrivons le complexe $\langle\, x\,,\, y\,\rangle$ sous forme trigonométrique : $\langle\, x\,,\, y\,\rangle = \rho e^{i\theta}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
0 &\le \langle\, x + \lambda e^{-i\theta}\, y\,,\, x + \lambda e^{-i\theta}\, y\,\rangle \\
&\le \langle\, x\,,\, x\,\rangle + \langle\, \lambda e^{-i\theta} y\,,\, \lambda e^{-i\theta} y\,\rangle + 2\mathfrak{Re}\langle\, x\,,\, \lambda e^{-i\theta} y\,\rangle \\
&\le \langle\, x\,,\, x\,\rangle + \lambda^2\, \langle\, y\,,\, y\,\rangle + 2\lambda\rho \\
&\le \langle\, y\,,\, y\,\rangle\, \lambda^2 + 2\rho\lambda + \langle\, x\,,\, x\,\rangle\ .
\end{aligned}$$

Ce trinôme à coefficients réels, étant positif pour toute valeur de λ, son discriminant réduit doit être négatif ou nul i.e. $\rho^2 - \langle\, y\,,\, y\,\rangle\, \langle\, x\,,\, x\,\rangle \le 0$.
(ii) On vérifie aisément que si x et y sont liés, on obtient une égalité.

Réciproquement, supposons que l'on ait une égalité. Si x est nul alors x et y sont liés. Sinon, posons $\alpha = \dfrac{\langle\, x \,,\, y \,\rangle}{\langle\, x \,,\, x \,\rangle}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\langle\, y - \alpha x \,,\, y - \alpha x \,\rangle &= \langle\, y \,,\, y \,\rangle + |\alpha|^2 \langle\, x \,,\, x \,\rangle - 2\,\mathfrak{Re}\,(\bar{\alpha}\langle\, x \,,\, y \,\rangle) \\ &= \langle\, y \,,\, y \,\rangle + \frac{|\langle\, x \,,\, y \,\rangle|^2}{\langle\, x \,,\, x \,\rangle} - 2\,\frac{|\langle\, x \,,\, y \,\rangle|^2}{\langle\, x \,,\, x \,\rangle} \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

D'où $y = \alpha\, x$. ■

2.1.6. Corollaire. **(Inégalité de Minkowski)** *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien complexe $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors*

$(\,i\,)$ $\quad \langle\, x + y \,,\, x + y \,\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle\, y \,,\, y \,\rangle^{\frac{1}{2}}$;

$(\,ii\,)$ *l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont positivement liés (i.e. $x = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = \lambda x$). liés.*

Preuve. (i) On a

$$\begin{aligned}\langle\, x + y \,,\, x + y \,\rangle &= \langle\, x \,,\, x \,\rangle + \langle\, y \,,\, y \,\rangle + 2\,\mathfrak{Re}\,(\langle\, x \,,\, y \,\rangle) \\ &\leq \langle\, x \,,\, x \,\rangle + \langle\, y \,,\, y \,\rangle + 2\,|\,\langle\, x \,,\, y \,\rangle\,| \\ &\leq \langle\, x \,,\, x \,\rangle + \langle\, y \,,\, y \,\rangle + 2\,\langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}}\,\langle\, y \,,\, y \,\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{ Cauchy-Schwarz }) \\ &\leq \Big(\,\langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle\, y \,,\, y \,\rangle^{\frac{1}{2}}\,\Big)^2\ .\end{aligned}$$

(ii) Si $x = 0$ on a égalité et x et y sont positivement liés. Supposons donc $x \neq 0$.
Si $y = \lambda\, x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors :
$\langle\, x + y \,,\, x + y \,\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle\, x + \lambda x \,,\, x + \lambda x \,\rangle^{\frac{1}{2}} = \Big(\,(1+\lambda)^2 \langle\, x \,,\, x \,\rangle\,\Big)^{\frac{1}{2}} = (1+\lambda)\langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}}$
$\langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle\, y \,,\, y \,\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} + |\lambda|\langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}} = (1+\lambda)\langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}}$.
Réciproquement, supposons que l'on ait une égalité dans l'inégalité de Minkowski. Dans la démonstration de (i), toutes les inégalités doivent être des égalités. On doit donc avoir d'une part, égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $y = \lambda x$, et d'autre part $\mathfrak{Re}\,(\langle\, x \,,\, y \,\rangle) = |\langle\, x \,,\, y \,\rangle|$, ce qui impose $\lambda \in \mathbb{R}^+$. ■

2.1.7. Corollaire. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. L'application $\|\ \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\|x\| = \langle\, x \,,\, x \,\rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E.*

Preuve. Immédiat. ■

2.1.8. Proposition . (Identité du parallélogramme) *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien complexe $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y\,,\, x+y \rangle + \langle x-y\,,\, x-y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\,(\langle x\,,\, y \rangle) + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathfrak{Re}\,(\langle x\,,\, y \rangle) \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right). \end{aligned}$$ ■

2.1.9. Remarque . On appelle *espace de Hilbert complexe* tout espace préhilbertien complexe, complet pour la norme issue du produit scalaire. Un espace hermitien est un cas particulier d'espace de Hilbert, puisque tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

2.2. Orthogonalité

2.2.1. Définition . Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si leur produit scalaire hermitien est nul.

2.2.2. Théorème de Pythagore . *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien complexe E. Si x et y sont orthogonaux alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Preuve. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\,(\langle x\,,\, y \rangle) = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ■

2.2.3. Remarque . Dans le cas euclidien, la condition $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, est équivalente à $\langle x\,,\, y \rangle = 0$. Dans le cas hermitien, ce n'est plus le cas on a seulement $\mathfrak{Re}\,(\langle x\,,\, y \rangle) = 0$.
Dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire hermitien usuel, si on pose $x = 1$ et $y = i$, on a $\|x+y\|^2 = \|1+i\|^2 = 2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, mais $\langle x\,,\, y \rangle = i \neq 0$.

2.2.4. Définitions . Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien complexe E. On dit que cette famille est *orthogonale* si pour tous i et j distincts dans I, les vecteurs e_i et e_j sont orthogonaux. Si de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, on dit que la famille est *orthonormale*.

2.2.5. Exemples .

a) Dans le cas de l'espace $E = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire défini par : $\langle f\,,\, g \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)dt$, la famille $(x \longmapsto e^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.

b) Dans l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ grâce au produit hermiten usuel, la base canonique est orthonormale.

c) Dans l'espace hermitien $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ grâce au produit hermiten $\langle\, M \,,\, N \,\rangle = \mathrm{Tr}(M^* N)$, la base canonique $(e_{i\,j})_{(i,\,j)\in[1,\,n]^2_{\mathbb{N}}}$ est orthonormale.
En effet : $\langle\, e_{i\,j} \,,\, e_{k\,\ell} \,\rangle = \mathrm{Tr}(e_{j\,i}\, e_{k\,\ell}) = \mathrm{Tr}(\delta_{i\,k}\, e_{j\,\ell}) = \delta_{i\,k}\,\delta_{j\,\ell} = \delta_{(i,\,j)\,(k,\,\ell)}$.

2.2.6. Proposition. *Dans un espace préhilbertien complexe, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Preuve. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Si pour $J \in \mathcal{P}_f(I)$, $\sum\limits_{j\in J} \lambda_j e_j$ est une combinaison linéaire nulle, alors pour tout $i \in J$ on a
$0 = \langle\, e_i \,,\, \sum\limits_{j\in J} \lambda_j e_j \,\rangle = \sum\limits_{j\in J} \lambda_j \langle\, e_i \,,\, e_j \,\rangle = \lambda_i \langle\, e_i \,,\, e_i \,\rangle$. D'où $\lambda_i = 0$. ∎

La réciproque de la proposition précédente est fausse, cependant à partir d'une famille libre, nous pouvons construire une famille orthogonale ; c'est l'objet du théorème suivant.

2.2.7. Théorème. **(Procédé d'orthogonalisation de Schmidt)**
Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille libre dans un espace préhilbertien complexe E, avec $I = [1, d]_{\mathbb{N}}$ (resp. $I = \mathbb{N}^*$).
Posons $e_1 = f_1$ et $e_{k+1} = f_{k+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\langle\, e_i \,,\, f_{k+1} \,\rangle}{\langle\, e_i \,,\, e_i \,\rangle}\, e_i$, pour tout $k \in [1, d-1]_{\mathbb{N}}$ (resp. $k \in \mathbb{N}^*$).
Alors la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale et de plus pour tout entier $k \in [1, d]_{\mathbb{N}}$ (resp. $k \in \mathbb{N}^*$), on a $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_k\}$.

Preuve. Montrons que nous pouvons construire e_k possédant les propriétés voulues par récurrence. Pour $k = 1$ c'est évident. Supposons la construction faite jusqu'au rang k. Puisque $\dim(\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\}) = \dim(\mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_k\}) = k$, la famille $(e_i)_{i=1\cdots k}$ est libre et donc $\langle\, e_i \,,\, e_i \,\rangle \neq 0$. Le vecteur e_{k+1} est bien défini par la formule de l'énoncé. Pour $j \in [1, k]_{\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle\, e_j \,,\, e_{k+1} \,\rangle &= \langle\, e_j \,,\, f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle\, e_i \,,\, f_{k+1} \,\rangle}{\langle\, e_i \,,\, e_i \,\rangle}\, e_i \,\rangle \\
&= \langle\, e_j \,,\, f_{k+1} \,\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle\, e_i \,,\, f_{k+1} \,\rangle}{\langle\, e_i \,,\, e_i \,\rangle} \langle\, e_j \,,\, e_i \,\rangle \\
&= \langle\, e_j \,,\, f_{k+1} \,\rangle - \langle\, e_j \,,\, f_{k+1} \,\rangle \\
&= 0\ .
\end{aligned}$$

La famille $(e_i)_{i=1\cdots k+1}$ est orthogonale.
Par définition e_{k+1} appartient à $\mathrm{Vect}\{f_{k+1}, e_1, \ldots, e_k\}$ qui, par hypothèse de récurrence, est égal à $\mathrm{Vect}\{f_{k+1}, f_1, \ldots, f_k\}$. Donc $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_{k+1}\} \subset \mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_{k+1}\}$. Comme on a également $f_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\langle\, e_i \,,\, f_{k+1} \,\rangle}{\langle\, e_i \,,\, e_i \,\rangle}\, e_i + e_{k+1}$, on déduit de même l'inclusion inverse. ∎

2.2.8. Corollaire. *Dans tout espace hermitien, il existe des bases orthonormales.*

Preuve. Soit $(f_i)_{i=1\cdots n}$ une base de E. Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, nous obtenons $(e_i)_{i=1\cdots n}$ qui est une base orthogonale. Il suffit de poser $e'_i = \dfrac{1}{\|e_i\|}\, e_i$, pour obtenir une base orthonormale. ∎

2.2.9. Remarques.

a) Dans le corollaire précédent la matrice de passage de la base (f_i) à la base orthonormale (e'_i) est triangulaire supérieure.

b) Dans une base orthonormale $(e_i)_{i=1\cdots n}$, le produit scalaire des vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$ a pour expression $\langle\, x\, ,\, y\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$.

2.2.10. Définitions. Soit A une partie d'un espace préhilbertien complexe. On appelle *orthogonal* de A, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de A. $\quad A^\perp = \{\, x \in E\ ;\ \forall a \in A \quad \langle\, x\, ,\, a\,\rangle = 0\,\}$

Si A et B sont deux parties de E, on dit que A et B sont *orthogonales* si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B, i.e. $A \subset B^\perp$.

2.2.11. Lemme. *Soit A est une partie d'un espace préhilbertien complexe E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ; de plus on a $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ et $\mathrm{Vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.*

Preuve. Soit $A \subset E$. On vérifie aisément que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Comme $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, on a $A^\perp \supset (\mathrm{Vect}(A))^\perp$. Soit $x \in A^\perp$. Pour tout $y \in \mathrm{Vect}(A)$, il existe une famille finie de vecteurs $(a_i)_{i=1\cdots k}$ de A et une famille finie $(\lambda_i)_{i=1\cdots k}$ de scalaires tels que $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$. On a alors $\langle\, x\, ,\, y\,\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle\, x\, ,\, a_i\,\rangle = 0$.

Donc $A^\perp \subset (\mathrm{Vect}(A))^\perp$, et par suite $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

De plus $A \subset A^{\perp\perp}$, donc $\mathrm{Vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$. ∎

2.2.12. Théorème. *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe E, alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F.*

Preuve. D'après le lemme précédent, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $x \in F \cap F^\perp$ on a $\langle\, x\, ,\, x\,\rangle = 0$, soit $x = 0$. Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe. Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Grâce au procédé d'orthonormalisation de Schmidt, nous obtenons une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$ de F.

Pour tout $x \in E$, posons $y = \sum_{i=1}^{p} \langle\, e_i\, ,\, x\,\rangle\, e_i$ et $z = x - y$. On a évidemment $x = y + z$

avec $y \in F$. Vérifions que z appartient à $F^{\perp}$. D'après le lemme, il suffit de vérifier qu'il est orthogonal à tous les e_k. Pour $k \in [1, p]_{\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} \langle e_k , z \rangle &= \langle e_k , x \rangle - \langle e_k , \sum_{i=1}^{p} \langle e_i , x \rangle e_i \rangle \\ &= \langle e_k , x \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle e_i , x \rangle \langle e_k , e_i \rangle \\ &= \langle e_k , x \rangle - \langle e_k , x \rangle \\ &= 0 . \end{aligned}$$

∎

2.2.13. Corollaire. *Soit E un espace hermitien.*

(i) *Si F est un sous-espace vectoriel de E alors*
$E = F \oplus F^{\perp}$ *et par suite* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^{\perp})$.

(ii) *Si A est une partie de E alors* $A^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(A)$.

Preuve. L'assertion (i) résulte du théorème précédent. Pour l'assertion (ii), appliquons le résultat de (i) aux sous-espaces vectoriels $A^{\perp}$ et $\mathrm{Vect}(A)$; on a, en posant $n = \dim(E)$:

$$\dim(A^{\perp})+\dim(A^{\perp\perp}) = n = \dim(\mathrm{Vect}(A))+\dim((\mathrm{Vect}(A))^{\perp}) = \dim(\mathrm{Vect}(A))+\dim(A^{\perp}) .$$

On en déduit que $\dim(A^{\perp\perp}) = \dim(\mathrm{Vect}(A))$. Compte tenu de l'inclusion $\mathrm{Vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$, on a l'égalité. ∎

2.2.14. Définitions. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace hermitien E. On appelle *projection (vectorielle) orthogonale* sur F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
On dit que des sous-espaces vectoriels de E sont en *somme directe orthogonale* s'ils sont en somme directe et deux à deux orthogonaux.

2.3. Adjoint d'un endomorphisme

2.3.1. Théorème de représentation de Riesz. *Soit E un espace hermitien.*

(i) *Pour tout $y \in E$, l'application* $\varphi_y : x \longmapsto \langle y , x \rangle$ *est une forme linéaire sur E.*

(ii) *L'application* $y \longmapsto \varphi_y$ *est semi-linéaire et bijective de E dans E^*.*

Preuve. La sesquilinéarité du produit hermitien assure que φ_y appartient à E^*, puis que φ est semi-linéaire. Si y appartient au noyau de φ, on a en particulier $0 = \varphi_y(y) = \langle y , y \rangle$; d'où $y = 0$. Donc φ est injective.

Soit $\psi \in E^*$. Considérons une base orthonormale $(e_i)_{i=1\cdots n}$ de E, posons $y = \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi(e_i)}\, e_i$; alors pour tout $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ on a :

$$\varphi_y(e_j) = \langle \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi(e_i)}\, e_i \,,\, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \psi(e_i) \langle e_i \,,\, e_j \rangle = \psi(e_j) \,.$$

Les formes linéaires φ_y et ψ coïncidant sur une base de E, sont égales et par conséquent φ est surjective. ∎

2.3.2. Corollaire. *Soit E un espace hermitien.*
Si $(e_i)_{i=1\cdots n}$ est une base orthonormale de E, alors sa base duale est $(\langle e_i \,,\, \cdot \rangle)_{i=1\cdots n}$. D'où

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \,,\, x \rangle\, e_i \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i \,,\, x \rangle|^2 \quad \text{et} \quad \forall \psi \in E^* \quad \psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(e_i) \langle e_i \,,\, \cdot \rangle \,.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.3.4, du théorème de Riesz et de la remarque 2.2.9.

2.3.3. Corollaire. *Soient E et F des espaces hermitiens et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe une unique application linéaire u^* de F dans E telle que :*

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad \langle u(x) \,,\, y \rangle = \langle x \,,\, u^*(y) \rangle \,.$$

Preuve. Soit y appartenant à F. L'application $x \longmapsto \langle y \,,\, u(x) \rangle$ appartient à E^*. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur, que nous noterons $u^*(y)$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\langle u^*(y) \,,\, x \rangle = \langle y \,,\, u(x) \rangle$, soit encore en utilisant la symétrie hermitienne $\langle u(x) \,,\, y \rangle = \langle x \,,\, u^*(y) \rangle$. Ceci prouve l'existence et l'unicité de u^*. Il reste à montrer que u^* est linéaire.
Soient y et z dans F, λ et μ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in E$ on a

$$\begin{aligned}
\langle x \,,\, u^*(\lambda y + \mu z) \rangle &= \langle u(x) \,,\, \lambda y + \mu z \rangle \\
&= \lambda \langle u(x) \,,\, y \rangle + \mu \langle u(x) \,,\, z \rangle \\
&= \lambda \langle x \,,\, u^*(y) \rangle + \mu \langle x \,,\, u^*(z) \rangle \\
&= \langle x \,,\, \lambda u^*(y) + \mu u^*(z) \rangle
\end{aligned}$$

D'où $u^*(\lambda y + \mu z) = \lambda u^*(y) + \mu u^*(z)$. ∎

2.3.4. Définitions. L'application linéaire u^* définie dans le corollaire précédent est appelée *adjoint* de u.

Soit u un endomorphisme d'un espace hermitien. On dit que u est *autoadjoint* ou *hermitien* si $u^* = u$.

2.3.5. Exemple. *Un projecteur orthogonal est autoadjoint.*

Soient F un sous-espace vectoriel de E hermitien et p le projecteur orthogonal sur F. Pour tout $x \in E$, on a $p(x) \in F$ et $(x - p(x)) \in F^{\perp}$. Donc pour x et y dans E, on a :

$$\begin{aligned}\langle\, p(x)\,,\, y\,\rangle &= \langle\, p(x)\,,\, p(y) + (y - p(y)\,\rangle \\ &= \langle\, p(x)\,,\, p(y)\,\rangle \\ &= \langle\, p(x) + (x - p(x))\,,\, p(y)\,\rangle \\ &= \langle\, x\,,\, p(y)\,\rangle\;.\end{aligned}$$

■

2.3.6. Proposition. *Soient E, F et G des espaces hermitiens.*

(*i*) *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a $u^{**} = u$.*

(*ii*) *L'application $u \longmapsto u^*$ est semi-linéaire bijective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$.*

(*iii*) *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $v \in \mathcal{L}(F, G)$ on a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.*

(*iv*) *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a : $\mathrm{Ker}\,(u^*) = (\mathrm{Im}\,(u))^{\perp}$ et $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\mathrm{Ker}\,(u))^{\perp}$*

(*v*) *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice de u^* est la transposée conjuguée de la matrice de u :*
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u^*) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u))^*$.

Preuve. (i) Pour tous x dans E et y dans F on a :

$$\langle\, y\,,\, (u^*)^*(x)\,\rangle = \langle\, u^*(y)\,,\, x\,\rangle = \langle\, y\,,\, u(x)\,\rangle\;.$$

D'où $u^{**} = u$.

(ii) Soient u et v dans $\mathcal{L}(E, F)$, λ et μ dans $\mathbb{C}$. On a pour tous x et y dans F :

$$\begin{aligned}\langle\, x\,,\, (\lambda u + \mu v)^*(y)\,\rangle &= \langle\, (\lambda u + \mu v)(x)\,,\, y\,\rangle \\ &= \bar{\lambda}\,\langle\, (u(x)\,,\, y\,\rangle + \bar{\mu}\,\langle\, v(x)\,,\, y\,\rangle \\ &= \bar{\lambda}\,\langle\, x\,,\, u^*(y)\,\rangle + \bar{\mu}\,\langle\, x\,,\, v^*(y)\,\rangle \\ &= \langle\, x\,,\, \bar{\lambda}\, u^*(y) + \bar{\mu}\, v^*(y)\,\rangle\;.\end{aligned}$$

D'où : $(\lambda u + \mu v)^* = \bar{\lambda}\, u^* + \bar{\mu}\, v^*$.

(iii) Pour tous $x \in E$ et $z \in G$ on a :

$$\langle\, v \circ u(x)\,,\, z\,\rangle = \langle\, u(x)\,,\, v^*(z)\,\rangle = \langle\, x\,,\, u^* \circ v^*(z)\,\rangle\;.$$

(iv) Pour tout $y \in F$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned}y \in \mathrm{Ker}\,(u^*) &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad \langle\, u^*(y)\,,\, x\,\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E \quad \langle\, y\,,\, u(x)\,\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow y \in (\mathrm{Im}\,(u))^{\perp}\;.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Ker}\,(u^*) = (\mathrm{Im}\,(u))^\perp$.
En l'appliquant cette égalité à u^*, on obtient $\mathrm{Ker}\,(u) = (\mathrm{Im}\,(u^*))^\perp$.
D'où $(\mathrm{Ker}\,(u^*))^\perp = (\mathrm{Im}\,(u))^{\perp\perp} = \mathrm{Im}\,(u)$.

(v) Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u^*)$. Pour tous i, $j \in [1,n]_{\mathbb{N}}$, $a'_{i\,j}$ est la i$^{\text{ème}}$-composante de $u^*(e_j)$ dans la base $(e_i)_{i=1\cdots n}$, c'est à dire :

$$a'_{i\,j} = e_i^*(u^*(e_j)) = \langle\, e_i\,,\, u^*(e_j)\,\rangle = \langle\, u(e_i)\,,\, e_j\,\rangle = \overline{\langle\, e_j\,,\, u(e_i)\,\rangle} = \overline{a_{j\,i}}\,. \qquad \blacksquare$$

2.4. Endomorphisme unitaire

2.4.1. Proposition. *Soient E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

$(\,i\,)$ *u est isométrique :* $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$.

$(\,ii\,)$ *u préserve le produit scalaire hermitien :* $\forall x, y \in E \quad \langle\, u(x)\,,\, u(y)\,\rangle = \langle\, x\,,\, y\,\rangle$.

$(\,iii\,)$ $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$.

$(\,iv\,)$ *u est bijective et* $u^* = u^{-1}$.

$(\,v\,)$ *u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale.*

$(\,vi\,)$ *Il existe une base orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ telle que $(u(e_i))_{i\in I}$ soit une base orthonormale.*

Preuve. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte de la formule de polarisation 2.1.3.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Pour tous x et y dans E on a $\langle\, u^*u(x)\,,\, y\,\rangle = \langle\, u(x)\,,\, u(y)\,\rangle = \langle\, x\,,\, y\,\rangle$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ D'après (iii) l'endomorphisme u est injectif. Comme E est de dimension finie, u est bijectif. Donc u^{-1} existe et $u^{-1} = (u^* \circ u) \circ u^{-1} = u^*$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Soit $(e_i)_{i=1\cdots n}$ une base orthonormale de E. Alors pour tous i et j dans $[1,n]_{\mathbb{N}}$, on a :

$$\delta_{i\,j} = \langle\, e_i\,,\, e_j\,\rangle = \langle\, u^* \circ u(e_i)\,,\, e_j\,\rangle = \langle\, u(e_i)\,,\, u(e_j)\,\rangle\,.$$

La famille $(u(e_i))_{i=1\cdots n}$ est orthonormale, donc libre ; elle est constituée de n vecteurs, c'est donc une base.

$(v) \Rightarrow (vi)$ Immédiat car il existe des bases orthonormales.

$(vi) \Rightarrow (i)$ Soit $x \in E$. Il se décompose en $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, e_i$. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(e_i)$ et comme $(u(e_i))$ et (e_i) sont des bases orthonormales, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \|x\|^2$. $\blacksquare$

2.4.2. Définitions. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ pour lequel les conditions de la proposition précédente sont satisfaites est dit *unitaire*. L'ensemble des endomorphismes unitaires de E est noté $\boldsymbol{U}(E)$.

Une matrice $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *unitaire* si l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ représenté par A dans la base canonique, est un endomorphisme unitaire de $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire usuel. L'ensemble des matrices unitaires de $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $\boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$.

2.4.3. Corollaire. *Soit $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{C})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $A \in \boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$.

(*ii*) $A^*A = I_n$.

(*iii*) *A est inversible et $A^{-1} = A^*$.*

(*iv*) *Les vecteurs colonnes de A constituent une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$.*

Preuve. Le corollaire se déduit immédiatement de la proposition précédente. ∎

2.4.4. Définitions. Soit E un espace hermitien. On note $\boldsymbol{SU}(E)$ l'ensemble des endomorphismes unitaires de E de déterminant 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\boldsymbol{SU}_n(\mathbb{C}) = \boldsymbol{U}_n(\mathbb{C}) \cap \boldsymbol{SL}_n(\mathbb{C})$.
(On rappelle que $\boldsymbol{SL}_n(\mathbb{C}) = \{ A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{C}) \; ; \; \det A = 1 \}$).

2.4.5. Proposition.

(*i*) *Soit E un espace hermitien. Alors $\boldsymbol{U}(E)$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{GL}(E)$ et $\boldsymbol{SU}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{U}(E)$.*

(*ii*) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{SU}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$.*

Preuve. (i) Il est clair que $\boldsymbol{U}(E) \subset \boldsymbol{GL}(E)$ et que $\mathrm{Id}_E \in \boldsymbol{U}(E)$. Si u et v appartiennent à $\boldsymbol{U}(E)$, alors $u \circ v$ est une isométrie et appartient donc à $\boldsymbol{U}(E)$. De plus, pour tout $x \in E$, on a $\|u^{-1}(x)\| = \|u(u^{-1}(x))\| = \|x\|$. D'où $u^{-1} \in \boldsymbol{U}(E)$.
L'application de $\boldsymbol{U}(E)$ dans $\mathbb{C}^*$, qui à u associe $\det u$, est un homomorphisme de groupes. Son noyau $\boldsymbol{SU}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{U}(E)$.
L'assertion (ii) est la traduction matricielle de l'assertion (i), dans le cas de $\mathbb{C}^n$ muni du produit hermitien usuel. ∎

2.4.6. Définitions. Soit E un espace hermitien. Le groupe $\boldsymbol{U}(E)$ est appelé *groupe unitaire* de E et le groupe $\boldsymbol{SU}(E)$ est appelé *groupe spécial unitaire* de E.

Les endomorphismes hermitiens ou unitaires sont des cas particuliers d'endomorphismes plus généraux que nous allons maintenant étudier.

2.5. Endomorphisme normal

2.5.1. Définition. Soit E est un espace hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *normal* s'il commute avec son adjoint : $u^* \circ u = u \circ u^*$.

2.5.2. Lemme. *Soient E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Alors*

(*i*) $\mathrm{Ker}\,(u^*) = \mathrm{Ker}\,(u)$.

(*ii*) *Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ on a $E_\lambda(u) = E_{\overline{\lambda}}(u^*)$.*

(*iii*) *Les sous-espaces vectoriels propres de u sont deux à deux orthogonaux.*

Preuve. (i) Soit $x \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}\,(u) &\Leftrightarrow \langle\, u(x)\,,\, u(x)\,\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle\, u^* \circ u(x)\,,\, x\,\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle\, u \circ u^*(x)\,,\, x\,\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle\, u^*(x)\,,\, u^*(x)\,\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(u^*)\ . \end{aligned}$$

(ii) Comme $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^* = u^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id}_E$, on vérifie aisément que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est normal. D'après (i) on a $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\left(u^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id}_E\right) = E_{\overline{\lambda}}(u^*)$.

(iii) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u. Pour tous $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$, on a :

$$\mu\,\langle\, x\,,\, y\,\rangle = \langle\, x\,,\, u(y)\,\rangle = \langle\, u^*(x)\,,\, y\,\rangle = \langle\, \overline{\lambda}x\,,\, y\,\rangle = \lambda\langle\, x\,,\, y\,\rangle\ .$$

Comme $\lambda \neq \mu$ on a donc $\langle\, x\,,\, y\,\rangle = 0$. ∎

2.5.3. Théorème. *Soient E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *u est normal.*

(*ii*) *Il existe une base orthonormale qui diagonalise u.*

(*iii*) *Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Posons $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. D'après le lemme précédent cette somme directe est orthogonale. Montrons que $F^\perp$ est stable par u. Soit $y \in F^\perp$.
Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$ et tout $x \in E_\lambda(u)$ on a : $\langle\, u(y)\,,\, x\,\rangle = \langle\, y\,,\, u^*(x)\,\rangle = \langle\, y\,,\, \overline{\lambda}x\,\rangle = 0$.

Par conséquent $u(y)$ appartient à $\left(\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right)^\perp$.

Or $\left(\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right)^\perp = \left(\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right)\right)^\perp = \left(\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)\right)^\perp = F^\perp$.

Par restriction u définit donc un endomorphisme v de $F^\perp$. D'après la définition de F, l'endomorphisme v est sans vecteur propre. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, ceci n'est possible que si $F^\perp = \{0\}$, c'est à dire $E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Il suffit de considérer une base orthonormale de chaque $E_\lambda(u)$ et de les concaténer pour obtenir une base orthonormale de E qui diagonalise u.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et ν_j la multiplicité de λ_j. D'après (ii) il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}\Big(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{\nu_1 \text{ fois}}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{\nu_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{\nu_p \text{ fois}}\Big) .$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Diag}\Big(\underbrace{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_1}}_{\nu_1 \text{ fois}}, \underbrace{\overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_2}}_{\nu_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\overline{\lambda_p}, \ldots, \overline{\lambda_p}}_{\nu_p \text{ fois}}\Big) .$$

Par interpolation de Lagrange (Théorème 1.3.8), il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\lambda_j) = \overline{\lambda_j}$, pour tout $j \in [1, p]_{\mathbb{N}}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) &= \mathrm{Diag}\Big(\underbrace{P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_1)}_{\nu_1 \text{ fois}}, \underbrace{P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_2)}_{\nu_2 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{P(\lambda_p), \ldots, P(\lambda_p)}_{\nu_p \text{ fois}}\Big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) . \end{aligned}$$

Donc $u^* = P(u)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Comme $P(u)$ commute avec u, l'endomorphisme u est normal. ∎

2.5.4. Corollaire. *Soient E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

(*i*) *L'endomorphisme u est hermitien si et seulement s'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$.*

(*ii*) *L'endomorphisme u est unitaire si et seulement s'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_j \in \mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\lambda| = 1 \,\}$.*

Preuve. (i) Si u est hermitien, il est normal, donc diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}$. Soit $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n})$. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$, on a $\lambda_j = \overline{\lambda_j}$ pour tout $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$.
La réciproque est immédiate.

L'assertion (ii) se démontre de manière analogue. ∎

3 Espace Euclidien

Dans toute cette partie le corps de base sera $\mathbb{R}$.
Pour la commodité du lecteur, dans les sections 1 à 3, nous rappelons, sans démonstration, un certain nombre de résultats vus en premier cycle. Les analogues de ces résultats ont été démontrés dans le cas complexe, dans la partie *espace hermitien*.
Nous nous intéressons ensuite à l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux.

3.1. Produit scalaire

3.1.1. Définitions. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle *produit scalaire* sur E, noté généralement $\langle\ ,\ \rangle$ toute forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. On dit que E est un *espace préhilbertien réel* s'il est muni d'un produit scalaire. On appelle *espace euclidien* tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

3.1.2. Exemples.

a) $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, avec $a < b$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire défini par : $\langle f , g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

b) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle x , y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ est un espace euclidien.

c) $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle M , N \rangle = \mathrm{Tr}({}^t M\, N)$ est un espace euclidien.

d) $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P , Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)dt$ est un espace euclidien.

3.1.3. Proposition. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tous x et y dans E on a les formules de polarisation :*

$$\begin{aligned} \langle x , y \rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle x+y , x+y \rangle - \langle x , x \rangle - \langle y , y \rangle \Big) \\ \langle x , y \rangle &= \frac{1}{4}\Big(\langle x+y , x+y \rangle - \langle x-y , x-y \rangle \Big) \end{aligned}$$

3.1.4. Théorème. **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors*

(i) $|\langle x , y \rangle| \leq \langle x , x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y , y \rangle^{\frac{1}{2}}$;

(ii) *l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont liés.*

3.1.5. Corollaire . (Inégalité de Minkowski) *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors*

(*i*) $\langle x+y\,, x+y \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x\,, x \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y\,, y \rangle^{\frac{1}{2}}$;

(*ii*) *l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x et y sont positivement liés (i.e. $x = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $y = \lambda x$).*

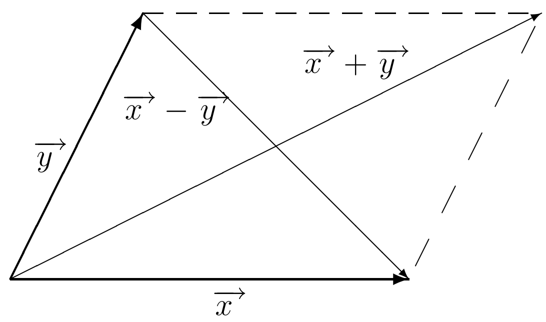
3.1.6. Corollaire . *Soit $(E\langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|\ \|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par $\|x\| = \langle x\,, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur E.*

3.1.7. Proposition . (Identité du parallélogramme) *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\ \|x\|^2 + \|y\|^2\ \right).$$

3.1.8. Remarques .

a) L'identité précédente signifie que dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.



b) Les formules de polarisation permettent de calculer le produit scalaire à partir de la norme ; on a par exemple : $\langle x\,, y \rangle = \dfrac{1}{4}\left(\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\ \right)$.

c) L'identité du parallélogramme caractérise les normes issues d'un produit scalaire. En effet, si $(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé réel tel que l'identité du parallélogramme soit vérifiée, on démontre qu'on peut définir sur E un produit scalaire par la formule ci-dessus.

d) On appelle *espace de Hilbert réel* tout espace préhilbertien réel, complet pour la norme issue du produit scalaire. Un espace euclidien est un cas particulier d'espace de Hilbert, puisque tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

3.2. Orthogonalité

3.2.1. Définition . Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On dit que deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

3.2.2. Théorème de Pythagore . *Soient x et y des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. Alors x et y sont orthogonaux si et seulement si* $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

3.2.3. Définitions . Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On dit que cette famille est *orthogonale* si pour tous i et j distincts dans I, les vecteurs e_i et e_j sont orthogonaux. Si de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$, on dit que la famille est *orthonormale*.

3.2.4. Théorème . **(Procédé d'orthogonalisation de Schmidt)**
Soit $(f_i)_{i=1\cdots d}$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E.
Posons $e_1 = f_1$ *et* $e_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e_i\, ,\, f_{k+1}\rangle}{\langle e_i\, ,\, e_i\rangle} e_i$, *pour tout* $k \in [1, d-1]_{\mathbb{N}}$.
Alors la famille $(e_i)_{i=1\cdots d}$ est orthogonale et de plus pour tout entier $k \in [1, d]_{\mathbb{N}}$, on a $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{f_1, \ldots, f_k\}$.

3.2.5. Corollaire . *Dans tout espace euclidien, il existe des bases orthonormales.*

3.2.6. Définitions . Soit A une partie d'un espace préhilbertien réel. On appelle *orthogonal* de A, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de A.
$A^\perp = \{\, x \in E\ ;\ \forall a \in A \quad \langle x\, ,\, a\rangle = 0 \,\}$
Si A et B sont deux parties de E, on dit que A et B sont *orthogonales* si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B, i.e. $A \subset B^\perp$.

3.2.7. Proposition . *Soit E un espace euclidien.*

(*i*) *Si A est une partie de E alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ; de plus on a* $A^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(A)$.

(*ii*) *Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F. On a :* $E = F \oplus F^\perp$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$.

3.2.8. Définitions . Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On appelle *projection (vectorielle) orthogonale* sur F, la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
On dit que des sous-espaces vectoriels de E sont en *somme directe orthogonale* s'ils sont en somme directe et deux à deux orthogonaux.

3.3. Adjoint d'un endomorphisme

3.3.1. Théorème de représentation de Riesz. *Soit E un espace euclidien.*

(*i*) *Pour tout $y \in E$, l'application* $\varphi_y : x \longmapsto \langle\, y\,,\, x\,\rangle$ *est une forme linéaire sur E.*

(*ii*) *L'application* $y \longmapsto \varphi_y$ *est un isomorphisme de E dans E^*.*

3.3.2. Corollaire. *Soit E un espace euclidien.*
Si $(e_i)_{i=1\cdots n}$ est une base orthonormale de E, alors sa base duale est $(\langle\, e_i\,,\,\cdot\,\rangle)_{i=1\cdots n}$. D'où

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle\, e_i\,,\, x\,\rangle\, e_i \quad \text{et} \quad \forall \psi \in E^* \quad \psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(e_i)\,\langle\, e_i\,,\,\cdot\,\rangle\ .$$

3.3.3. Corollaire. *Soient E et F des espaces euclidiens et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Il existe une unique application linéaire u^* de F dans E telle que :*

$$\forall x \in E \quad \forall y \in F \quad \langle\, u(x)\,,\, y\,\rangle = \langle\, x\,,\, u^*(y)\,\rangle\ .$$

3.3.4. Définition. L'application linéaire u^* définie dans le corollaire précédent est appelée *adjoint* de u.

3.3.5. Proposition. *Soient E, F et G des espaces euclidiens.*

(*i*) *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ on a $u^{**} = u$.*

(*ii*) *L'application $u \longmapsto u^*$ est linéaire bijective de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{L}(F,E)$.*

(*iii*) *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $v \in \mathcal{L}(F,G)$ on a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.*

(*iv*) *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ on a :* $\mathrm{Ker}\,(u^*) = (\mathrm{Im}\,(u))^{\perp}$ *et* $\mathrm{Im}\,(u^*) = (\mathrm{Ker}\,(u))^{\perp}$

(*v*) *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Relativement à la base $\mathcal{B}$, la matrice de u^* est la transposée de la matrice de u :* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u^*) = {}^t(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u))\,.$

3.4. Endomorphisme symétrique

3.4.1. Définitions. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. On dit que u est *autoadjoint* ou *symétrique* si $u^* = u$.
On note $\boldsymbol{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$.
$\boldsymbol{S}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \; {}^tA = A \}$.

3.4.2. Remarque. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien. Alors u est symétrique si et seulement si dans une (ou toute) base orthonormale, sa matrice est symétrique.*

3.4.3. Exemple. *Un projecteur orthogonal est autoadjoint.*

3.4.4. Proposition. *Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.*

(i) *Les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.*

(ii) *Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.*

Preuve. (i) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u. Pour tous $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. On a

$$\mu \langle x , y \rangle = \langle x , u(y) \rangle = \langle u^*(x) , y \rangle = \langle u(x) , y \rangle = \lambda \langle x , y \rangle \; .$$

Comme $\lambda \neq \mu$ on a donc $\langle x , y \rangle = 0$.
(ii) Supposons que $u(F) \subset F$. Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$ on a :
$\langle u(y) , x \rangle = \langle y , u(x) \rangle = 0$ car $u(x) \in F$ et $y \in F^\perp$.
Donc $u(F^\perp) \subset F^\perp$. ∎

3.4.5. Théorème. *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'endomorphisme u est symétrique.*

(ii) *Il existe une base orthonormale qui diagonalise u.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Posons $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. D'après la proposition 3.4.4, cette somme directe est orthogonale et $F^\perp$ est stable par u.
Si $F = E$, on obtient une base orthonormale de E diagonalisant u, en concaténant une base orthonormale de chacun des $E_\lambda(u)$ et le théorème est démontré.
Sinon, désignons par v l'endomorphisme de $F^\perp$ défini par restriction de u. Cet endomorphisme est symétrique et sans vecteur propre. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $F^\perp$ et

soit A la matrice de v relativement à $\mathcal{B}$. Cette matrice réelle symétrique peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes et elle est alors hermitienne. D'après le corollaire 2.5.4, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et toutes ses valeurs propres sont réelles ; par conséquent A admet au moins une valeur propre réelle, ce qui contredit le fait que v est sans vecteur propre.
L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ est immédiate. ∎

3.4.6. Corollaire. *Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.*

Preuve. Immédiat. ∎

3.5. Endomorphisme orthogonal

3.5.1. Proposition. *Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est isométrique :* $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$.

(ii) *u préserve le produit scalaire :* $\forall x, y \in E \quad \langle\, u(x)\,,\, u(y)\,\rangle = \langle\, x\,,\, y\,\rangle$.

(iii) $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$.

(iv) *u est bijective et* $u^* = u^{-1}$.

(v) *u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale.*

(vi) *Il existe une base orthonormale $(e_i)_{i \in I}$ telle que $(u(e_i))_{i \in I}$ soit une base orthonormale.*

Preuve. cf Proposition 2.4.1. ∎

3.5.2. Définitions. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ pour lequel les conditions de la proposition précédente sont satisfaites est dit *orthogonal*. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E est noté $\boldsymbol{O}(E)$.
Une matrice $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base canonique, est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. L'ensemble des matrices orthogonales de $\boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$.

3.5.3. Corollaire. *Soit $A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \in \boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) ${}^tAA = I_n$.

(iii) *A est inversible et* $A^{-1} = {}^tA$.

(iv) *Les vecteurs colonnes de A constituent une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$.

Preuve. cf Corollaire 2.4.3. ∎

3.5.4. Remarques .

a) Une projection orthogonale distincte de Id_E n'est pas un endomorphisme orthogonal.

b) Le corollaire 3.4.6 de diagonalisation des matrices réelles symétriques, peut être précisé comme suit :
Pour toute matrice $A \in \boldsymbol{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

3.5.5. Proposition . *Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E et p_F la projection orthogonale sur F. Alors $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme orthogonal symétrique.*

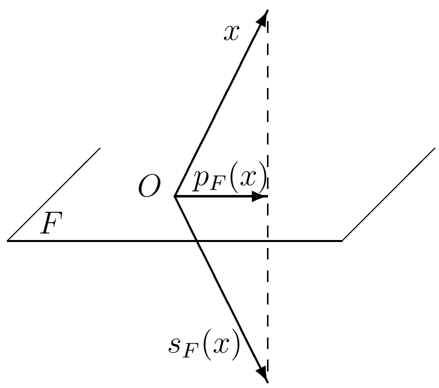
Preuve. On a $s_F^* = 2p_F^* - \mathrm{Id}_E = 2p_F - \mathrm{Id}_E = s_F$. Donc s_F est un endomorphisme symétrique.
Il est orthogonal car $s_F^* \circ s_F = (2p_F - \mathrm{Id}_E)^2 = 4p_F - 2p_F - 2p_F + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$. ∎

Remarquons que si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$ on a $s_F(x) = y - z$, d'où la définition suivante :

3.5.6. Définitions . Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. On appelle *symétrie orthogonale* ou *symétrie vectorielle orthogonale* par rapport à F l'application s_F définie dans la proposition précédente.
Si F est un hyperplan on dit que s_F est une *réflexion* d'hyperplan F.

$p_F(x)$ projection orthogonale de x sur F

$s_F(x)$ symétrique orthogonal de x par rapport à F



3.5.7. Proposition . *Soient E un espace euclidien et $u \in \boldsymbol{O}(E)$. Alors*

(*i*) $\mathrm{Sp}\,(u) \subset \{-1, 1\}$ *et les sous-espaces vectoriels (propres)* $E_1(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ *et* $E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$ *sont orthogonaux.*

(*ii*) $\det u \in \{-1, 1\}$.

(*iii*) *Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.*

Preuve. (i) Soit x un vecteur propre de u relatif à la valeur propre λ. On a donc $u(x) = \lambda x$. Comme u est isométrique, il vient $|\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|u(x)\| = \|x\|$. D'où $|\lambda| = 1$.
Soient maintenant $x \in E_1(u)$ et $y \in E_{-1}(u)$.
On a : $\langle x , y \rangle = \langle u(x) , u(y) \rangle = \langle x , -y \rangle = -\langle x , y \rangle$. D'où $\langle x , y \rangle = 0$.
(ii) On a $1 = \det(\mathrm{Id}_E) = \det(u^*u) = \det(u^*) \times \det(u) = (\det u)^2$.
(iii) Supposons que $u(F) \subset F$. Comme u est bijective, on a $\dim(u(F)) = \dim(F)$ et par suite $u(F) = F$. Soit $y \in F^\perp$, pour tout $x \in F$, il existe $z \in F$ tel que $x = u(z)$ et on a : $\langle u(y) , x \rangle = \langle u(y) , u(z) \rangle = \langle y , x \rangle = 0$. Il en résulte que $u(y)$ appartient à $F^\perp$. ∎

3.5.8. Définitions. Soient E un espace euclidien et $u \in \boldsymbol{O}(E)$. On dit que u est un endomorphisme orthogonal *direct* (resp. *indirect*) si $\det u = 1$ (resp. $\det u = -1$). On note $\boldsymbol{SO}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux directs de E.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\boldsymbol{SO}_n(\mathbb{R}) = \boldsymbol{O}_n(\mathbb{R}) \cap \boldsymbol{SL}_n(\mathbb{R})$.
(On rappelle que $\boldsymbol{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \boldsymbol{M}_n(\mathbb{R}) \,;\, \det A = 1 \}$).

3.5.9. Proposition.

(i) *Soit E un espace euclidien. Alors $\boldsymbol{O}(E)$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{GL}(E)$ et $\boldsymbol{SO}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{O}(E)$.*

(ii) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$.*

Preuve. cf Proposition2.4.5. ∎

3.5.10. Définitions. Soit E un espace euclidien. Le groupe $\boldsymbol{O}(E)$ est appelé *groupe orthogonal* de E et le groupe $\boldsymbol{SO}(E)$ est appelé *groupe spécial orthogonal* de E.

3.6. Forme réduite d'un endomorphisme orthogonal

Avant d'établir le résultat en dimension n, nous allons faire quelques remarques et rappels généraux et nous intéresser tout particulièrement à la dimension 2.

3.6.1. Remarque. Si E est un espace euclidien de dimension 1 alors $\boldsymbol{SO}(E) = \{ \mathrm{Id}_E \}$ et $\boldsymbol{O}(E) = \{ \mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E \}$.

3.6.2. Rappel. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E sont dites de même sens si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E et elle définit 2 classes d'équivalence. L'espace E sera dit *orienté* si l'on choisit l'une des classes d'équivalence dont les éléments sont appelés *bases directes* ; les bases de l'autre classe sont appelées *bases indirectes*.

3.6.3. Définitions. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On rappelle que l'action est dite *transitive* si pour tous x et y dans X, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. On dit que l'action est *libre* si pour tous x et y dans X, il existe au plus un $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$.

3.6.4. Proposition. *Soit P un plan vectoriel euclidien. L'action naturelle de $\boldsymbol{SO}(P)$ sur l'ensemble des vecteurs de P de norme 1, est libre et transitive.*

Preuve. Orientons P. Soient e_1 et f_1 des vecteurs de P de norme 1. Il existe un unique vecteur e_2 (resp. f_2) tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ (resp. $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$) soit une base orthonormale directe de P.
Il existe $u \in \boldsymbol{SO}(P)$ transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$; d'où la transitivité.
Soit $v \in \boldsymbol{SO}(P)$ tel que $v(e_1) = f_1$. Alors v doit transformer toute base orthonormale directe de premier vecteur e_1 en une base orthonormale directe de premier vecteur f_1. Donc $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ et $v = u$. L'action est donc libre. ∎

3.6.5. Théorème. *Soit P un plan vectoriel euclidien orienté.*

(*i*) *Soient $u \in \boldsymbol{SO}(P)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$ *avec* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(*ii*) *La matrice de u et par suite, la classe de θ modulo $2\pi\mathbb{Z}$, sont indépendantes de la base orthonormale directe.*

(*iii*) *Le groupe $\boldsymbol{SO}(P)$ est abélien.*

Preuve. (i) Soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. C'est une matrice orthogonale de déterminant 1. D'après le corollaire 3.5.3 on a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \qquad (1) \\ c^2 + d^2 &= 1 \qquad (2) \\ ac + bd &= 0 \qquad (3) \\ ad - bc &= 1 \qquad (4) \end{aligned}$$

D'après (1), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.
D'après (2), il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $c = \cos\theta'$ et $d = \sin\theta'$.
(3) et (4) s'écrivent alors :
$0 = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta' - \theta)$ et $1 = \cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' = \sin(\theta' - \theta)$.
D'où $\theta' - \theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $c = \cos(\theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\sin\theta$ et $d = \sin(\theta + \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos\theta$.
(iii) Le caractère abélien du groupe se vérifie aisément à partir de l'expression matricielle établie en (i).

(*ii*) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ des bases orthonormales directes. Il existe v dans $\boldsymbol{SO}(P)$ transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$. On a alors pour tous i et j dans $\{1, 2\}$:

$$\langle\, u(e'_j)\,,\, e'_i\,\rangle = \langle\, u(v(e_j))\,,\, v(e_i)\,\rangle = \langle\, v(u(e_j))\,,\, v(e_i)\,\rangle = \langle\, u(e_j)\,,\, e_i\,\rangle\ .$$

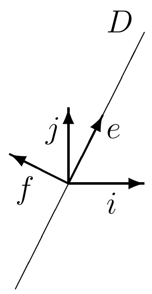
D'où l'invariance de la matrice de u dans toute base orthonormale directe. ∎

3.6.6. Définitions. Soit P un plan vectoriel euclidien orienté. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *rotation (vectorielle) d'angle* θ, notée Rot_θ, l'endomorphisme orthogonal dont la matrice dans toute base orthonormale directe est R_θ.
Si x et y sont des vecteurs de P de norme 1, d'après la proposition 3.6.4, il existe une unique rotation transformant x en y ; on appelle *angle* de x et y, noté $(\widehat{x, y})$, tout réel θ (unique modulo $2\pi\mathbb{Z}$) tel que $\mathrm{Rot}_\theta(x) = y$.

3.6.7. Corollaire. *Soient P un plan vectoriel euclidien orienté et $u \in \boldsymbol{O}(P)\backslash\boldsymbol{SO}(P)$. Alors u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle D (réflexion par rapport à D). Si e est un vecteur directeur de norme 1 de D et $\mathcal{B} = (i, j)$ une base orthonormale directe de P, alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \textit{où} \quad \varphi = 2(\widehat{i, e})\ .$$

Preuve. Comme $\det u = -1$, son polynôme caractéristique, $\chi_u(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(u)X - 1$, admet 2 racines réelles de signes opposés. D'après la proposition 3.5.7, ces racines ne peuvent être que -1 et 1. Par conséquent u est diagonalisable et c'est la symétrie par rapport à $E_1(u)$ et parallèlement à $E_{-1}(u)$. Comme les sous-espaces propres de u sont orthogonaux (Proposition 3.5.7), il en résulte que u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $D = E_1(u)$. En dimension 2, les hyperplans sont les droites et u est donc la réflexion par rapport à D.



Soit f le vecteur de P tel que $\mathcal{B}' = (e, f)$ soit une base orthonormale directe de P. Posons $\theta = (\widehat{i, e})$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est R_θ. D'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\,(u) = R_\theta^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u)\,R_\theta\,.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

3.6.8. Théorème . *Soient E un espace euclidien et $u \in \boldsymbol{O}(E)$. Alors E est somme directe orthogonale de $E_1(u) = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$, de $E_{-1}(u) = \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E)$ et de plans stables sur lesquels u agit par rotation d'angle non multiple de π . Autrement dit, il existe une base orthonormale de E relativement à laquelle la matrice de u soit constituée de blocs sur la diagonale : $I_k,\ -I_\ell, R_{\theta_1}, \cdots, R_{\theta_m}$ avec $\theta_i \notin \pi\mathbb{Z}$ pour $i \in [1,m]_{\mathbb{N}}$, $(k,\ell,m) \in \mathbb{N}^3$ et $k+\ell+2m = \dim(E)$.*

Preuve. On a déjà vu (Proposition 3.5.7) que $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$ sont en somme directe orthogonale. Soit $F_0 = (E_1(u) \oplus E_{-1}(u))^{\perp}$. Si $F_0 = \{0\}$, le théorème est démontré.
Sinon, comme $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$ sont stables par u, leur somme directe l'est également et par suite F_0 est stable par u (Proposition 3.5.7) ; de plus la restriction u_0 de u à F_0 est orthogonale et ne possède pas de vecteurs propres. Posons $v_0 = u_0 + u_0^*$. C'est un opérateur symétrique de F_0. Il admet donc au moins une valeur propre λ et un vecteur propre associé w. Posons $P_1 = \operatorname{Vect}\{w, u_0(w)\}$. Comme u_0 est sans vecteur propre $u_0(w)$ et w ne sont pas liés et P_1 est un plan. Appliquons u_0 aux deux membres de l'égalité $(u_0 + u_0^*)(w) = \lambda w$, il vient $u_0^2(w) = -w + \lambda u_0(w)$. Par conséquent P_1 est stable par u_0. La restriction de u_0, donc de u, à P_1 appartient à $\boldsymbol{O}(P_1)$ et est sans vecteur propre ; d'après l'étude faite en 3.6.5 et 3.6.7, c'est donc une rotation d'angle θ_1 avec $\theta_1 \notin \pi\mathbb{Z}$. Soit F_1 l'orthogonal de P_1 dans F_0. Si $F_1 = \{0\}$, le théorème est démontré, sinon on itère le procédé qui s'arrête, car la dimension des espaces F_j construits décroît strictement. ∎

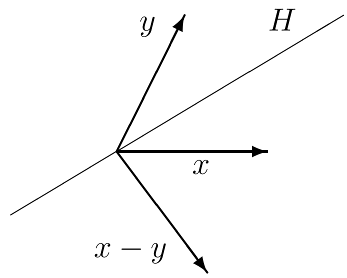
3.6.9. Application : Classification en dimension 3 .

	$\boldsymbol{SO}$(E)			$\boldsymbol{O}$(E)$\backslash\boldsymbol{SO}$(E)		
$k = \dim(E_1)$	3	1	1	2	0	0
$\ell = \dim(E_{-1})$	0	0	2	1	1	3
Nature	Id_E	rotation vectorielle axiale d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	symétrie vectorielle axiale	symétrie vectorielle plane	rotation-symétrie vectorielle d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	$-\operatorname{Id}_E$
Trace	3	$2\cos\theta+1$	-1	1	$2\cos\theta-1$	-3
Symétrique	oui	non	oui	oui	non	oui

3.7. Groupe orthogonal

3.7.1. Lemme . *Soient x et y des vecteurs distincts, de norme 1, dans un espace euclidien. Alors l'orthogonal de $\mathbb{R}(x-y)$ est un hyperplan H et la réflexion d'hyperplan H échange x et y.*

Preuve. Posons $z = x - y$ et $H = (\mathbb{R}z)^\perp$. Comme z est non nul, H est un hyperplan. Désignons par s la réflexion d'hyperplan H. On peut écrire : $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}z$ avec $x+y$ dans H car $\langle x+y\,,\, z\rangle = \langle x+y\,,\, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0\,.$
Donc $s(x) = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}z = y\,.$ ∎



3.7.2. Corollaire . *Soit E un espace euclidien. Le groupe $\boldsymbol{O}(E)$ est engendré par les réflexions.*

Preuve. Toute réflexion étant involutive, nous devons prouver que tout endomorphisme orthogonal u peut s'écrire comme produit de réflexions. Faisons la démonstration par récurrence sur $k = \dim(E_1(u)^\perp)$.
Si $k = 0$ alors u est égal à Id_E qui par convention est le produit de 0 réflexions.
Soit $k \geq 1$. Supposons que tout $v \in \boldsymbol{O}(E)$ tel que $\dim(E_1(v)^\perp) < k$, se décompose en produits de réflexions, et soit $u \in \boldsymbol{O}(E)$ tel que $\dim(E_1(u)^\perp) = k$. Considérons un vecteur $x \in E_1(u)^\perp$ de norme 1 et posons $y = u(x)$. On a $\|y\| = 1$ et $y \neq x$. De plus $y \in E_1(u)^\perp$ car $E_1(u)$ étant stable par u, $E_1(u)^\perp$ l'est également. Soient $H = (\mathbb{R}(x-y))^\perp$ et s la réflexion d'hyperplan H. Comme $x - y$ appartient à $E_1(u)^\perp$, on a $\mathbb{R}(x-y) \subset E_1(u)^\perp$ et donc $E_1(u) \subset H$. D'où, $s \circ u(z) = s(z) = z$, pour tout $z \in E_1(u)$. D'après le lemme précédent, on a aussi $s \circ u(x) = s(y) = x$ et donc $E_1(u) \oplus \mathbb{R}x \subset E_1(s \circ u)$. Ceci prouve que $\dim(E_1(s\circ u)^\perp) \leq k-1$ et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence à $s \circ u$.
Donc $u = s \circ (s \circ u)$ est produit de réflexions. ∎

3.7.3. Proposition . *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.*
Le groupe $\boldsymbol{O}(E)$ est isomorphe à un produit semi-direct de $\boldsymbol{SO}(E)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Si n est impair, le groupe $\boldsymbol{O}(E)$ est isomorphe au produit direct de $\boldsymbol{SO}(E)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Preuve. On a déja vu que $\boldsymbol{SO}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{O}(E)$.
Soit s une réflexion. Posons $H = \{\mathrm{Id}_E, s\}$. Comme s est involutive ($s^2 = \mathrm{Id}_E$), H est un sous-groupe de $\boldsymbol{O}(E)$, isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est clair que $H \cap K = \{\mathrm{Id}_E\}$. Montrons que $KH = \boldsymbol{O}(E)$.
Soit $u \in \boldsymbol{O}(E)$. Si $u \in \boldsymbol{SO}(E)$ alors $u = u \circ \mathrm{Id}_E$ appartient à KH ; sinon $u \circ s$ appartient à $\boldsymbol{SO}(E)$, car $\det u \circ s = \det u \, \det s = (-1)^2 = 1$, et $u = (u \circ s) \circ s$ appartient à KH.
Il suffit d'appliquer le théorème de caractérisation du produit semi-direct pour conclure que le groupe $\boldsymbol{O}(E)$ est isomorphe à un produit semi-direct de $\boldsymbol{SO}(E)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si n est impair, $-\mathrm{Id}_E$ appartient à $\boldsymbol{O}(E)\backslash\boldsymbol{SO}(E)$. Alors $H = \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E\}$ est un sous-groupe distingué de $\boldsymbol{O}(E)$ car il est inclus dans le centre de $\boldsymbol{O}(E)$. On vérifie comme précédemment que $H \cap K = \{\mathrm{Id}_E\}$ et $KH = \boldsymbol{O}(E)$ et on conclut grâce au théorème de caractérisation du produit direct. ∎

3.7.4. Rappels de topologie dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.

(*i*) *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

(*ii*) *Toute application linéaire ou bilinéaire définie entre espaces vectoriels normés de dimension finie est continue.*

(*iii*) *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors l'application $\|\| \ \|\|$ définie par $\|\|u\|\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.*

(*iv*) *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les parties fermées et bornées.*

3.7.5. Théorème. *Soit E un espace euclidien. Le groupe $\boldsymbol{O}(E)$ est compact dans $\mathcal{L}(E)$.*

Preuve. Un espace euclidien étant de dimension finie, il en est de même de $\mathcal{L}(E)$. Montrons que $\boldsymbol{O}(E)$ est fermé, borné dans $\mathcal{L}(E)$.
Soit $u \in \boldsymbol{O}(E)$. Comme u est une isométrie, on a $\|\|u\|\| = 1$. Donc $\boldsymbol{O}(E)$ est borné.
L'application qui à $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $(u^*, u) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ est linéaire donc continue ; l'application qui à $(v, u) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ associe $v^* \circ u \in \mathcal{L}(E)$ est bilinéaire donc continue. Par composition l'application $f : u \longmapsto u^* \circ u$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même est continue. Il en résulte que $\boldsymbol{O}(E)$, image réciproque du fermé $\{\mathrm{Id}_E\}$ par f est un fermé de $\mathcal{L}(E)$. ∎

Chapitre II : Géométrie affine

1 Espace et application affines

Il y a deux grandes méthodes pour présenter la géométrie. L'une définit d'abord la géométrie affine. C'est celle, initiée par Euclide, où les points et les droites sont des concepts de base satisfaisant à un certain nombre d'axiomes, par exemple : *par deux points distincts il passe une droite et une seule*. Les vecteurs apparaissent ensuite comme des classes d'équivalence de bipoints équipollents.
L'autre méthode, celle que nous présentons, commence par la géométrie vectorielle et utilise les outils de l'algèbre linéaire pour définir la géométrie affine. En géométrie vectorielle, une droite, un plan ont toujours un vecteur privilégié, le vecteur nul, ce qui n'est pas le cas dans la notion intuitive de droite ou plan. Pour supprimer cet inconvénient, nous devons pouvoir "déplacer l'origine", c'est à dire effectuer des translations. La notion d'action de groupe va nous permettre de modéliser cette situation.

1.1. Espace affine associé à un espace vectoriel

1.1.1. Définitions. On appelle *espace affine*, un ensemble non vide $\mathcal{E}$ sur lequel agit le groupe additif $(E,+)$ d'un espace vectoriel de façon libre et transitive. On dit que E est l'*espace directeur* de $\mathcal{E}$. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les *points*, ceux de E les *vecteurs*.
L'action du vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ sur le point $M \in \mathcal{E}$ est notée $M + \overrightarrow{x}$.
Si l'espace vectoriel E est de dimension finie, $\dim(E)$ est appelé la *dimension* de l'espace affine $\mathcal{E}$.

1.1.2. Remarques. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E.

a) Il faudra prendre garde de ne pas confondre le signe " + " de la définition précédente qui représente l'action de E sur $\mathcal{E}$, avec l'addition dans E notée également " + " ; les deux symboles pouvant cohabiter dans la même formule (cf b))

b) Explicitons l'action de E sur $\mathcal{E}$: $\forall M \in \mathcal{E} \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E$

$$M + \overrightarrow{0} = M \qquad \text{et} \qquad M + (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = (M + \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{y}.$$

c) L'action de E sur $\mathcal{E}$, définit un homomorphisme de groupes, noté t, de E dans $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}, \circ)$, groupe des permutations de $\mathcal{E}$: Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, l'application $t_{\vec{x}} : M \longmapsto M + \overrightarrow{x}$ appartient à $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

d) Traduisons que l'action est libre et transitive :
Pour tous M et N dans $\mathcal{E}$, il existe un unique $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $M + \overrightarrow{x} = N$.

1.1.3. Définitions. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E.
Soient M et N des points de $\mathcal{E}$. L'unique vecteur $\overrightarrow{x}$ tel que $M + \overrightarrow{x} = N$, est noté $\overrightarrow{MN}$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, l'application $t_{\vec{x}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie dans la remarque précédente est appelée *translation* de vecteur $\overrightarrow{x}$. On note $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.

1.1.4. Remarque. Avec les notations précédentes, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} M + \overrightarrow{x} = N &\Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{MN} \\ &\Leftrightarrow t_{\vec{x}}(M) = N \ . \end{aligned}$$

1.1.5. Proposition. **(Relation de Chasles.)** *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Pour tous points A, B et C de $\mathcal{E}$, on a :*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \ .$$

Preuve. On a : $A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$.
D'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. ∎

1.1.6. Exemple. Soit E un espace vectoriel. Posons $\mathcal{E}_E = E$ et faisons agir E sur $\mathcal{E}_E$ par l'addition de E. Alors $\mathcal{E}_E$ est un espace affine sur E appelé *espace affine canonique* sur E. Remarquons que pour tous x et y dans $\mathcal{E}_E$ on a : $\overrightarrow{xy} = y - x$.

1.1.7. Lemme. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Si O est un point fixé de $\mathcal{E}$, alors l'application ψ_O de $\mathcal{E}$ dans E, qui à M associe $\overrightarrow{OM}$, est bijective et sa bijection réciproque est ψ_O^{-1} : $\overrightarrow{x} \longmapsto O + \overrightarrow{x}$.*

Preuve. Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Posons $N = O + \overrightarrow{x}$. On a alors $\psi_O(N) = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{x}$.
Soit $M \in \mathcal{E}$. On a $O + \psi_O(M) = O + \overrightarrow{OM} = M$.
Les deux applications de l'énoncé sont bien réciproques l'une de l'autre. ∎

1.1.8. Corollaire. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un K-espace vectoriel E, de dimension finie. Soient O un point fixé de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_i})_{i=1\cdots n}$ une base de E.*
Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe une unique famille $(x_i) \in K^n$ telle que $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$.

Preuve. Immédiat. ∎

1.1.9. Définitions. Reprenons les données du corollaire, le système $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ formé d'un point O de $\mathcal{E}$ et d'une base de E est appelé *repère cartésien* de $\mathcal{E}$. Le point O est l'*origine du repère* et les scalaires $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les *coordonnées* du point M de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1.2. Application affine

1.2.1. Proposition. *Soient E et E' des K-espaces vectoriels, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines d'espace directeur E et E' respectivement, et f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\exists v \in \mathcal{L}(E,E') \quad \forall \overrightarrow{x} \in E \quad f \circ t_{\vec{x}} = t_{v(\vec{x})} \circ f$.

(ii) $\exists v \in \mathcal{L}(E,E') \quad \forall \overrightarrow{x} \in E \quad \forall M \in \mathcal{E} \quad f(M + \overrightarrow{x}) = f(M) + v(\overrightarrow{x})$.

(iii) $\exists v \in \mathcal{L}(E,E') \quad \forall M \in \mathcal{E} \quad \forall N \in \mathcal{E} \quad f(N) = f(M) + v(\overrightarrow{MN})$.

(iv) $\exists v \in \mathcal{L}(E,E') \quad \forall M \in \mathcal{E} \quad \forall N \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{f(M)f(N)} = v(\overrightarrow{MN})$.

(v) $\exists v \in \mathcal{L}(E,E') \quad \exists O \in \mathcal{E} \quad \forall N \in \mathcal{E} \quad f(N) = f(O) + v(\overrightarrow{ON})$.

(vi) $\exists O \in \mathcal{E} \quad \psi_{f(O)} \circ f \circ \psi_O^{-1}$ appartient à $\mathcal{L}(E,E')$.

Si ces conditions sont vérifiées, l'application v est unique.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ $f \circ t_{\vec{x}} = t_{v(\vec{x})} \circ f$ si et seulement si $\forall M \in \mathcal{E} \quad f \circ t_{\vec{x}}(M) = t_{v(\vec{x})} \circ f(M)$ soit encore $f(M + \overrightarrow{x}) = f(M) + v(\overrightarrow{x})$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ On a $f(N) = f(M + \overrightarrow{MN}) = f(M) + v(\overrightarrow{MN})$.

L'équivalence $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ résulte de la remarque 1.1.4.

$(iii) \Rightarrow (v)$ Immédiat.

$(v) \Leftrightarrow (vi)$ On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathcal{E} \quad f(N) = f(O) + v(\overrightarrow{ON}) &\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{E} \quad v(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{f(O)\,f(N)} \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{E} \quad v \circ \psi_O(N) = \psi_{f(O)} \circ f(N) \\ &\Leftrightarrow v = \psi_{f(O)} \circ f \circ \psi_O^{-1} \ . \end{aligned}$$

$(v) \Rightarrow (ii)$ Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et $M \in \mathcal{E}$. Posons $N = M + \overrightarrow{x}$. Alors $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{x}$. Appliquons (v) avec N, puis M, il vient :

$f(M + \overrightarrow{x}) = f(N) = f(O) + v(\overrightarrow{ON}) = f(O) + v(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{x}) = f(O) + v(\overrightarrow{OM}) + v(\overrightarrow{x}) = f(M) + +v(\overrightarrow{x})$.

L'unicité de v résulte de l'assertion (vi). ∎

1.2.2. Définitions. Soient E et E' des K-espaces vectoriels, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines d'espace directeur E et E' respectivement. Une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, pour laquelle les conditions de la proposition précédente sont vérifiées est dite *affine*.

L'unique application linéaire $v \in \mathcal{L}(E,E')$ telle que $\forall \overrightarrow{x} \in E \quad f \circ t_{\vec{x}} = t_{v(\vec{x})} \circ f$, est appelée *application linéaire associée* à f et est notée $f^{\#}$.

L'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ sera noté $\mathcal{A}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ et simplement $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ si $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

1.2.3. Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E.*
Toute translation est une application affine dont l'application linéaire associée est Id_E.
Réciproquement, toute application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, dont l'application linéaire associée est Id_E, *est une translation.*

Autrement dit, f est une translation si et seulement si $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$, pour tous M et N de $\mathcal{E}$.

Preuve. Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in E$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $\overrightarrow{x} \in E$ on a : $t_{\vec{u}}(M + \overrightarrow{x}) = (M + \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{u} = M + (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{u}) = (M + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{x} = t_{\vec{u}}(M) + \overrightarrow{x}$.
D'où $t_{\vec{u}}$ est une application affine et $(t_{\vec{u}})^{\#} = \mathrm{Id}_E$.

Réciproquement, soit f une application affine dont l'application linéaire associée est Id_E. Soient A un point de $\mathcal{E}$ fixé et $A' = f(A)$. Montrons que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AA'}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a :
$f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = A' + f^{\#}(\overrightarrow{AM}) = A' + \overrightarrow{AM} = (A' + \overrightarrow{A'M}) + \overrightarrow{AA'} = M + \overrightarrow{a}$. ∎

1.2.4. Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$. Considérons une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, qui à tout point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{R}$, associe le point M' de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_n)$. Alors f est affine si et seulement s'il existe $A \in \boldsymbol{M}_n(K)$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ tels que :*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Preuve. Cette proposition est la traduction matricielle de l'assertion (v) de la proposition 1.2.1 : $(b_1, \ldots, b_n)$ sont les coordonnées de $f(O)$ dans $\mathcal{R}$ et A est la matrice de $f^{\#}$ dans la base $(\overrightarrow{e_i})$. ∎

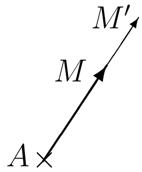
1.2.5. Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines respectivement sur des K-espaces vectoriels E et E'. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $A' \in \mathcal{E}'$ et tout $v \in \mathcal{L}(E, E')$, il existe une unique application affine $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ telle que $f(A) = A'$ et $f^{\#} = v$. Cette application f est définie par :*

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad f(M) = A' + v(\overrightarrow{AM}).$$

Preuve. Unicité : Soit $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ telle que $f(A) = A'$ et $f^{\#} = v$. D'après l'assertion (v) de la proposition 1.2.1 on a :
$f(M) = f(A + \overrightarrow{AM}) = f(A) + f^{\#}(\overrightarrow{AM}) = A' + v(\overrightarrow{AM})$.

Existence : Définissons f par la formule de l'énoncé. Toujours d'après l'assertion (v) de la proposition 1.2.1, f est affine et $f^{\#} = v$; on a également $f(A) = A'$. ∎

1.2.6. Définition. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un K-espace vectoriel E. Pour tout point $A \in \mathcal{E}$ et tout scalaire non nul $\lambda \in K$, on appelle *homothétie* de *centre* A et de *rapport* λ, notée $h(A,\lambda)$, l'unique application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ laissant fixe A et telle que $h(A,\lambda)^{\#} = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.



Si $M' = h(A,\lambda)(M)$ alors $\overrightarrow{AM'} = \lambda\,\overrightarrow{AM}$.
(Pour la figure $\lambda = \dfrac{3}{2}$.)

1.2.7. Lemme. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie et $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Alors f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $f^{\#}$.*

Preuve. Supposons que $1 \notin \mathrm{Sp}\left(f^{\#}\right)$. Alors $(f^{\#} - \mathrm{Id}_E)$ est inversible. Soient O fixé dans $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$. On a :

$$\begin{aligned}
A \ \text{ fixe pour } \ f \ &\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Of(A)}\\
&\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)\,f(A)}\\
&\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{Of(O)} + f^{\#}(\overrightarrow{OA})\\
&\Leftrightarrow\ (f^{\#} - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{Of(O)}\\
&\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OA} = (f^{\#} - \mathrm{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{Of(O)})\,.
\end{aligned}$$

Donc f admet bien un unique point fixe $A = O + (f^{\#} - \mathrm{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{Of(O)})$.
Réciproquement, supposons que f admette un unique point fixe A. Soit $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $f^{\#}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$. Alors $f(A + \overrightarrow{x}) = f(A) + f^{\#}(\overrightarrow{x}) = A + \overrightarrow{x}$. Par unicité du point fixe, on a $A + \overrightarrow{x} = A$, d'où $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. ∎

1.2.8. Corollaire. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sur un K-espace vectoriel E et λ un scalaire non nul et distinct de 1. Toute application affine $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ dont l'application linéaire associée est $\lambda\,\mathrm{Id}_E$ est une homothétie de rapport λ.*
Autrement dit, f est une homothétie de rapport λ si et seulement si $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \lambda\overrightarrow{MN}$, pour tous M et N dans $\mathcal{E}$.

Preuve. D'après le lemme précédent, f possède un unique point fixe que nous notons A.

1.2.9. Lemme. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E, $g \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ et $\overrightarrow{a}$ un vecteur de E. Alors*

g et $t_{\vec{a}}$ commutent si et seulement si $\overrightarrow{a}$ est invariant par $g^{\#}$.

Preuve. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a :

$$g \circ t_{\vec{a}}(M) = g(M + \vec{a}) = g(M) + g^{\#}(\overrightarrow{a}) \quad \text{et} \quad t_{\vec{a}} \circ g(M) = g(M) + \overrightarrow{a}\,.$$

On voit donc que g et $t_{\vec{a}}$ commutent si et seulement si $g^{\#}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$. ∎

1.3. Groupe des automorphismes affines

1.3.1. Proposition. *Considérons des espaces vectoriels E, E', E'' sur un même corps K, des espaces affines $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ d'espace directeur respectivement E, E', E'', et des applications affines $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, $g \in \mathcal{A}(\mathcal{E}', \mathcal{E}'')$. Alors l'application $g \circ f$ est affine, et $(g \circ f)^{\#} = g^{\#} \circ f^{\#}$.*

Preuve. Pour tous M et N dans $\mathcal{E}$, on a :

$$\overrightarrow{(g \circ f)(M)\,(g \circ f)(N)} = g^{\#}(\overrightarrow{f(M)f(N)}) = g^{\#}(f^{\#}(\overrightarrow{MN})).$$

Donc $g \circ f$ est affine, et l'application linéaire associée est $g^{\#} \circ f^{\#}$. ∎

1.3.2. Définitions. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines respectivement sur des K-espaces vectoriels E et E'. On appelle *isomorphisme affine* de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ une application affine f de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$, telle qu'il existe une application affine g de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}'}$.

Un isomorphisme affine de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}$ est appelé un *automorphisme affine* de l'espace $\mathcal{E}$. Nous noterons $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{E})$ l'ensemble des automorphismes affines de $\mathcal{E}$.

1.3.3. Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines respectivement sur des K-espaces vectoriels E et E'. Pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *f est un isomorphisme affine.*

(*ii*) *f est bijective.*

(*iii*) *$f^{\#}$ est bijective.*

Preuve. Soit O fixé dans $\mathcal{E}$. Posons $O' = f(O)$. On a la relation $f^{\#} = \psi_{O'} \circ f \circ \psi_O^{-1}$ $(*)$ avec ψ_O et $\psi_{O'}$ bijectives (Lemme 1.1.7).

L'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ en découle immédiatement.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Puisque f est bijective, l'application f^{-1} existe et d'après $(*)$ on a :
$\psi_O \circ f^{-1} \circ \psi_{O'}^{-1} = (f^{\#})^{-1} \in \mathcal{L}(E', E)$. Ce qui prouve que f^{-1} est affine. ∎

1.3.4. Exemple. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, sur un K-espace vectoriel E. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. Alors l'application Ψ qui à tout point $M \in \mathcal{E}$ associe ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{E}_{K^n}$, où $\mathcal{E}_{K^n}$ désigne l'espace affine canonique sur K^n, est un isomorphisme affine.*

Preuve. En effet, désignons par v l'isomorphisme d'espaces vectoriels qui à tout vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ associe ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$. On a alors pour tout point $M \in \mathcal{E}$ $\Psi(M) = (x_1, \dots, x_n) = v(\sum_{i=1}^{n} x_i\,\overrightarrow{e_i}) = v(\overrightarrow{OM})$. Donc Ψ est une application affine dont l'application linéaire associée est v qui est bijective. ∎

1.3.5. Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Alors*

(*i*) Aut $(\mathcal{E})$ *est un sous-groupe de* $(\mathcal{S}_{\mathcal{E}}, \circ)$, *groupe des permutations de* $\mathcal{E}$.

(*ii*) *L'application* $\nu : f \longmapsto f^{\#}$ *est un homomorphisme de groupes surjectif de* Aut $(\mathcal{E})$ *dans* $\boldsymbol{GL}(E)$.

(*iii*) *Le noyau de l'homomorphisme* ν *est* $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, *ensemble des translations de* $\mathcal{E}$.

Preuve. (*i*) Il est clair que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Aut}\,(\mathcal{E}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{E}}$. D'après la proposition 1.3.1, Aut $(\mathcal{E})$ est stable par composition ; par définition il est stable par passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

(*ii*) D'après la proposition 1.3.3, l'application ν est bien à valeurs dans le groupe linéaire $\boldsymbol{GL}(E)$ et c'est un homomorphisme de groupes d'après la proposition 1.3.1. Le caractère surjectif de ν découle de la proposition 1.2.5.

L'assertion (*iii*) est conséquence de 1.2.3 . ■

1.3.6. Corollaire. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Alors* $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ *est un sous-groupe distingué de* Aut $(\mathcal{E})$. *Plus précisément, pour tout* $\overrightarrow{x} \in E$ *et tout* $f \in \mathrm{Aut}\,(\mathcal{E})$ *on a :* $f \circ t_{\vec{x}} \circ f^{-1} = t_{f^{\#}(\vec{x})}$.

Preuve. $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, noyau de l'homomorphisme ν est un sous-groupe distingué de Aut $(\mathcal{E})$. Donc $g = f \circ t_{\vec{x}} \circ f^{-1}$ est une translation. Soit $A \in \mathcal{E}$ fixé. Déterminons l'image par g du point $A' = f(A)$. On a $g(A') = f \circ t_{\vec{x}}(A) = f(A + \overrightarrow{x}) = f(A) + f^{\#}(\overrightarrow{x}) = t_{f^{\#}(\vec{x})}(A')$. ■

1.3.7. Théorème. *Le groupe* Aut $(\mathcal{E})$ *des automorphismes affines d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *d'espace directeur E, est isomorphe au produit semi-direct* $E \underset{\alpha}{\times} \boldsymbol{GL}(E)$ *où* α *désigne l'action naturelle de* $\boldsymbol{GL}(E)$ *sur E définie par* $(u, \overrightarrow{x}) \longmapsto u(\overrightarrow{x})$.

Preuve. Fixons une origine A de $\mathcal{E}$ et considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta_A : & \mathrm{Aut}\,(\mathcal{E}) & \longrightarrow & E \underset{\alpha}{\times} \boldsymbol{GL}(E) \\ & f & \longmapsto & (\overrightarrow{Af(A)}, f^{\#}) \end{array}$$

Montrons que θ_A est un homomorphisme de groupes :

Pour tous f et g dans Aut $(\mathcal{E})$, on a : $\theta_A(f \circ g) = (\overrightarrow{A\, f \circ g(A)}, (f \circ g)^{\#})$.

Or $(f \circ g)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$ et $\overrightarrow{A\, f \circ g(A)} = \overrightarrow{A\, f(A)} + \overrightarrow{f(A)\, f \circ g(A)} = \overrightarrow{A\, f(A)} + f^{\#}(\overrightarrow{A\, g(A)})$.

On a donc $\theta_A(f \circ g) = \theta_A(f) *_{\alpha} \theta_A(g)$.

Montrons que θ_A est injective : Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(\theta_A)$. On a d'une part $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire A est fixe par f, et d'autre part $f^{\#} = \mathrm{Id}_E$, c'est à dire $f \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. D'où $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Montrons que θ_A est surjective : Soit $(\overrightarrow{x}, v) \in E \times \boldsymbol{GL}(E)$. D'après la proposition 1.2.5, il existe une $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ telle que $f(A) = A + \overrightarrow{x}$ et $f^{\#} = v$. Comme $f^{\#} \in \boldsymbol{GL}(E)$, f appartient à Aut $(\mathcal{E})$ et on a $\theta_A(f) = (\overrightarrow{Af(A)}, f^{\#}) = (\overrightarrow{x}, v)$. ■

1.3.8. Proposition. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E.*

(*i*) $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \{ f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \ ; \ \exists \lambda \in K^* \quad f^{\#} = \lambda \, \mathrm{Id}_E \}$ *est un sous-groupe distingué de* $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

(*ii*) *Le groupe $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ des translations est un sous-groupe distingué de $\mathcal{H}(\mathcal{E})$.*

(*iii*) *Pour tout $A \in \mathcal{E}$, les homothéties de centre A forment un sous-groupe $\mathcal{H}_A(\mathcal{E})$ de $\mathcal{H}(\mathcal{E})$.*

(*iv*) *$\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est la réunion de $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ et des sous-groupes $\mathcal{H}_A(\mathcal{E})$ quand A décrit $\mathcal{E}$.*

(*v*) *$\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct $E \underset{\alpha}{\times} K^*$ où α désigne l'action naturelle $(\lambda, \overrightarrow{x}) \longmapsto \lambda \, \overrightarrow{x}$ de K^* sur E.*

Preuve. (i) Rappelons que le centre $\mathcal{Z}(\boldsymbol{GL}(E))$ de $\boldsymbol{GL}(E)$ est constitué par les opérateurs de la forme $\lambda \, \mathrm{Id}_E$, où λ est un scalaire non nul. Comme $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est l'image réciproque par ν de $\mathcal{Z}(\boldsymbol{GL}(E))$, sous-groupe distingué de $\boldsymbol{GL}(E)$, il est donc distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$.

(ii) $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathrm{Ker}(\nu)$ est un sous-groupe, distingué dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ et inclus dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$, il est donc distingué dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$.

(iii) Pour $A \in \mathcal{E}$, le stabilisateur $\mathcal{H}_A(\mathcal{E})$ de A dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ tels que l'on ait $f(A) = A$ et $f^{\#} = \lambda \, \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in K^*$. On voit que c'est l'ensemble $\mathcal{H}_A(\mathcal{E})$ des homothéties de centre A.

(iv) résulte des caractérisations des translations et homothéties établies précédemment (1.2.3 et 1.2.8).

(v) Reprenons l'isomorphisme θ_A de la démonstration du théorème précédent.
On vérifie aisément que l'image de $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ par θ_A est $E \times \mathcal{Z}(\boldsymbol{GL}(E))$. Par suite $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct de E par $\mathcal{Z}(\boldsymbol{GL}(E))$ relativement à l'action naturelle. Comme K^* est isomorphe à $\mathcal{Z}(\boldsymbol{GL}(E))$ par l'application $\lambda \longmapsto \lambda \mathrm{Id}_E$, on obtient le résultat annoncé. ■

1.3.9. Définition. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. On appelle *groupe des homothéties et translations* de $\mathcal{E}$, le groupe $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ défini dans la proposition précédente.

1.4. Sous-espace affine

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Considérons un sous-espace vectoriel F de E. On peut restreindre à F l'action de E. On obtient ainsi une action du sous-groupe F sur $\mathcal{E}$. Cette action de F est libre, car l'action de E est libre. Les orbites des points de $\mathcal{E}$, sous cette action de F constituent une partition de $\mathcal{E}$. Sur chacune de ces orbites, F agit transitivement, par définition d'une orbite, et librement. Toute orbite pour l'action de F est donc un espace affine sur l'espace vectoriel F.

1.4.1. Définitions. Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Les orbites pour l'action du sous-espace vectoriel F sur $\mathcal{E}$ sont appelées les *sous-espaces affines* de $\mathcal{E}$ de direction F : Pour tout point A de $\mathcal{E}$, l'orbite de A sous l'action de F,

$$\mathcal{F}_A = \{\, M \in \mathcal{E}\ ;\ \exists\, \overrightarrow{x} \in F \quad M = A + \overrightarrow{x}\,\}$$

est l'unique sous-espace affine passant par A et de direction F.

Les sous-espaces affines de dimension 1 sont appelés les *droites affines* de $\mathcal{E}$, ceux de dimension 2 sont les *plans affines* . Si $\mathcal{E}$ est de dimension finie n, les sous-espaces affines de dimension $n-1$ sont appelés les *hyperplans affines* de $\mathcal{E}$.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est *parallèle* à $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ si la direction F de $\mathcal{F}$ est incluse dans la direction G de $\mathcal{G}$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *parallèles* s'ils ont même direction.

1.4.2. Remarques .

a) Un sous-espace affine est non vide, puisque c'est l'orbite d'un point. Un sous-espace affine de dimension 0 est réduit à un point.

b) Comme les orbites constituent une partition de $\mathcal{E}$, par tout point A de $\mathcal{E}$, il passe un unique sous-espace affine $\mathcal{F}_A$ de direction F, qui est l'orbite de A sous l'action de F .
$$\mathcal{F}_A = \{\, M \in \mathcal{E}\ ;\ \exists\, \overrightarrow{x} \in F \quad M = A + \overrightarrow{x}\,\} \ .$$

c) L'injection naturelle $M \longmapsto M$ de $\mathcal{F}_A$ dans $\mathcal{E}$ est affine, l'application linéaire associée est l'injection canonique $\overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{x}$ de F dans E .

d) Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, et soit $A \in \mathcal{F}$. Pour que $\mathcal{F}$ soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ il faut et il suffit que $F = \{\, \overrightarrow{x} \in E\ ;\ \exists M \in \mathcal{F} \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{AM}\,\}$ soit un sous-espace vectoriel de E . Ce sous-espace vectoriel F de E est alors la direction de $\mathcal{F}$.

e) Par deux points distincts A et B de $\mathcal{E}$, il passe une droite affine et une seule, la droite (AB) : passant par A et de direction $\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{AB}\}$.
Soit $\mathcal{D}$ une droite affine et A un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Il passe par A une et une seule, droite affine parallèle à $\mathcal{D}$.

f) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, sur un K-espace vectoriel E. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de dimension d, passant par un point A et de direction F.
Si F est défini par une de ses bases $(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_d})$ et si l'on connaît les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ ainsi que les coordonnées des vecteurs v_j dans la base (e_i), on peut à partir de la relation

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{v_k} \quad \text{avec} \quad \lambda_j \in K \ ,$$

obtenir une représentation paramétrique des points M de $\mathcal{F}$.
Si F est défini comme intersection de $n-d$ hyperplans vectoriels H_k (Chap I Corollaire 1.3.6), on obtient un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{F}$ en traduisant les relations : $\overrightarrow{OM} \in H_k$ pour $k \in [1, n-d]_{\mathbb{N}}$.

1.4.3. Proposition. *Soient E, E' des K-espaces vectoriels, et $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ des espaces affines d'espace directeur E et E' respectivement.*

(*i*) *Soient $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ et $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$, passant par A et de direction F. Alors $f(\mathcal{F})$ est le sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ passant par $f(A)$ et de direction $f^{\#}(F)$.*

(*ii*) *Des sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$, sont parallèles si et seulement s'il existe une translation transformant $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$.*

(*iii*) *Soient f et g dans $\mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$. Si $\{ M \in \mathcal{E} \,;\, f(M) = g(M) \}$ est non vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\operatorname{Ker}\left(f^{\#} - g^{\#}\right)$.*

Preuve. (*i*) Désignons par $\mathcal{F}'$ le sous-espace affine passant par $f(A)$ et de direction $f^{\#}(F)$.
Pour tout $M' \in f(\mathcal{F})$, il existe $M \in \mathcal{F}$ tel que $M' = f(M)$. Alors $\overrightarrow{f(A)M'} = f^{\#}(\overrightarrow{AM})$ appartient à $f^{\#}(F)$. Donc M' appartient à $\mathcal{F}'$.
Réciproquement, soit N' appartenant à $\mathcal{F}'$. Alors le vecteur $\overrightarrow{f(A)N'}$ est élément de $f^{\#}(F)$. Comme $F = \{ \overrightarrow{v} \in E \,;\, \exists M \in \mathcal{F} \ \ \overrightarrow{AM} = v \}$, il existe un point N dans $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{f(A)N'} = f^{\#}(\overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{f(A)f(N)}$. D'où $N' = f(N)$ appartient à $f(\mathcal{F})$.
(*ii*) L'application linéaire associée à une translation étant Id_E, le translaté de tout sous-espace affine est un sous-espace affine de même direction, d'après (*i*).
Récipoquement, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des sous-espaces affines de même direction F, passant respectivement par A et B, la translation τ de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme $\mathcal{F}$, en le sous-espace affine passant par $\tau(A) = B$ et de direction F, c'est à dire $\mathcal{G}$.
(*iii*) Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $f(A) = g(A)$. Désignons par $\mathcal{F}$ le sous-espace affine, passant par

A et de direction $\operatorname{Ker}\left(f^{\#}-g^{\#}\right)$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(M)=g(M) &\Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(M)}=\overrightarrow{g(A)g(M)} \\ &\Leftrightarrow f^{\#}(\overrightarrow{AM})=g^{\#}(\overrightarrow{AM}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \operatorname{Ker}\left(f^{\#}-g^{\#}\right) \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{F}\ . \end{aligned}$$

■

1.4.4. Corollaire. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E et $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Si f admet un point invariant A, alors l'ensemble des points invariants de f est le sous-espace affine passant par A et de direction $E_1(f^{\#})=\operatorname{Ker}\left(f^{\#}-\operatorname{Id}_E\right)$.*

Preuve. Ce corollaire est un cas particulier de l'assertion (iii) de la proposition, avec $g=\operatorname{Id}_{\mathcal{E}}$. ■

1.4.5. Proposition. *Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$. Pour tout $i \in I$, notons F_i la direction de $\mathcal{F}_i$.*
Si $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$.

Preuve. Prenons pour origine de $\mathcal{E}$ un point A de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$. On a

$$\begin{aligned} M \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i &\Leftrightarrow \forall i \quad M \in \mathcal{F}_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \quad \overrightarrow{AM} \in F_i \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \bigcap_{i\in I} F_i\ . \end{aligned}$$

Comme $F=\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E, cela montre que l'intersection des $\mathcal{F}_i$ est le sous-espace affine passant par A et de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$ de $\mathcal{E}$. ■

1.4.6. Corollaire. *Soit X une partie non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$ d'espace directeur E. Il existe un plus petit sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ contenant X, à savoir l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant X. Si A est un point de X, alors la direction de $\mathcal{F}$ est le sous-espace vectoriel $F=\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u} \in E\ ;\ \exists M \in X \quad \overrightarrow{u}=\overrightarrow{AM}\}$ de E.*

Preuve. D'après la proposition précédente, l'intersection $\mathcal{F}$ des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant X est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, contenant X. Il est par construction inclus dans tout autre sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant X, ce qui justifie la première assertion. Notons F la direction de $\mathcal{F}$ et soit $V=\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u} \in E\ ;\ \exists M \in X \quad \overrightarrow{u}=\overrightarrow{AM}\}$. Soit $\mathcal{F}'$ le sous-espace affine passant par A et de direction V. Comme $\mathcal{F}'$ contient X , on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Réciproquement, soit $M \in \mathcal{F}'$. Il existe un vecteur $\overrightarrow{x} \in V$ tel que $M = A + \overrightarrow{x}$. Par définition du sous-espace vectoriel V, il existe $M_1, \ldots, M_k$ dans X et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ dans K tels que $\overrightarrow{x} = \lambda_1\overrightarrow{AM_1} + \cdots + \lambda_k\overrightarrow{AM_k}$. Comme A et M_j, pour $j \in [1,k]_{\mathbb{N}}$, sont dans X et donc dans $\mathcal{F}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM_j}$ appartiennent à F. D'où $\overrightarrow{x} \in F$ et $M \in \mathcal{F}$. ■

1.4.7. Définition. Soit X une partie non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$. Le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant X de $\mathcal{E}$, est appelé le *sous-espace affine engendré* par X .

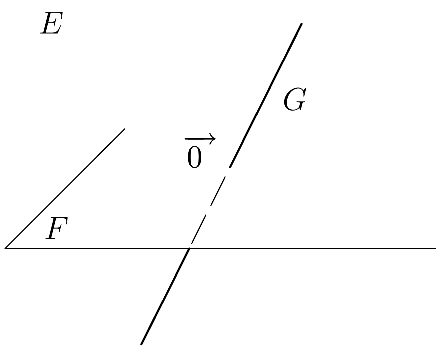
1.4.8. Lemme. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, dont les directions F et G sont supplémentaires. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point.*

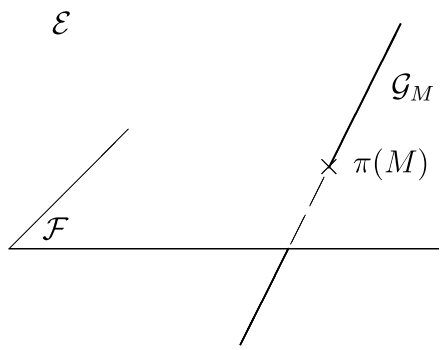
Preuve. Soient A un point de $\mathcal{F}$ et B un point de $\mathcal{G}$. Par hypothèse le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se décompose sous la forme $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ avec $\overrightarrow{x} \in F$ et $\overrightarrow{y} \in G$. Considérons le point $O = A + \overrightarrow{x}$. Il appartient à $\mathcal{F}$ et aussi à $\mathcal{G}$, car $A + \overrightarrow{x} = A + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{y}) = B + (-\overrightarrow{y})$. D'après la proposition 1.4.5, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G = \{ \overrightarrow{0} \}$; l'intersection est donc réduite au point O. ■

1.4.9. Corollaire. *Soient espace affine $\mathcal{E}$ d'espace directeur E, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et G un supplémentaire dans E de la direction F de $\mathcal{F}$.*

(*i*) *Pour tout point M de $\mathcal{E}$, le sous-espace affine $\mathcal{G}_M$ passant par M et de direction G, a une intersection avec $\mathcal{F}$ réduite à un seul point, noté $\pi(M)$.*

(*ii*) *L'application π ainsi définie est affine et son application linéaire associée est la projection vectorielle sur F, parallèlement à G.*





Preuve. L'assertion (i) résulte de la proposition précédente.

(ii) Soient M et N des points de $\mathcal{E}$. Le vecteur $\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)}$ appartient à la direction F de $\mathcal{F}$. Il peut aussi se décomposer sous la forme :

$$\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)} = \overrightarrow{\pi(M)M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{N\pi(N)} .$$

Désignons par p la projection vectorielle sur F, parallèlement à G. Appliquons p aux deux membres de l'égalité précedente, en remarquant que $\overrightarrow{\pi(M)M}$ et $\overrightarrow{N\pi(N)}$ sont des vecteurs de $G = \mathrm{Ker}\,(p)$; nous obtenons $\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)} = p\,(\overrightarrow{\pi(M)\pi(N)}) = p(\overrightarrow{MN})$. ∎

1.4.10. Définition . Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, dont les directions F et G sont supplémentaires. On appelle *projection affine* sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ (ou dans la direction de G), l'application π définie dans le corollaire précédent.

2 Barycentre en géométrie affine

2.1. Barycentre

2.1.1. Définitions . Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un K-espace vectoriel E. Tout couple $(A, \lambda) \in \mathcal{E} \times K$ est appelé *point pondéré*. Toute famille finie de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ est appelée *système de points pondérés*.

2.1.2. Proposition . *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un K-espace vectoriel E. Pour tout système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$, il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que :*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \,. \tag{1}$$

De plus pour tout point $O \in \mathcal{E}$ on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i\in I} \lambda_i} \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} \,. \tag{2}$$

Preuve. Pour toute origine $O \in \mathcal{E}$, la relation de Chasles $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}$ montre que (1) et (2) sont équivalentes.
Or la relation (2) détermine un unique point G . Ce point ne dépend pas de l'origine O choisie, car O n'intervient pas dans la relation (1). ∎

2.1.3. Définitions . Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés d'un espace affine $\mathcal{E}$, tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$. L'unique point G de $\mathcal{E}$ défini dans la proposition précédente est appelé *barycentre* de ce système ; il est noté $\mathrm{bary}\left((A_i, \lambda_i)_{i\in I} \right)$.
Si tout les λ_i sont égaux, on dit que G est l'*isobarycentre* du système.

2.1.4. Remarques .

a) Si on multiplie tous les coefficients λ_i par un même scalaire non nul, le barycentre est inchangé. Pour définir le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ on peut donc supposer que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$.

b) Supposons $\mathcal{E}$ de dimension finie, muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$. Les coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ de G s'expriment à partir des coordonnées $x_{1i}, \ldots, x_{ni}$ des points A_i , suivant la relation (2) :

$$\begin{cases} y_1 & = & \dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}(\lambda_1 x_{11} + \cdots + \lambda_k x_{1k}) \\ .. & .. & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n & = & \dfrac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k}(\lambda_1 x_{n1} + \cdots + \lambda_k x_{nk}) \end{cases}$$

2.1.5. Proposition . **Associativité du barycentre.** *Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés d'un espace affine $\mathcal{E}$, tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$ Soit $I = I_1 \cup \ldots \cup I_s$ une partition de l'ensemble I telle que pour tout $p \in [1, s]_{\mathbb{N}}$ on ait $\mu_p = \sum_{i\in I_p} \lambda_i \neq 0$. Pour $p \in [1, s]_{\mathbb{N}}$ introduisons $G_p = \mathrm{bary}\Big((A_i, \lambda_i)_{i\in I_p} \Big)$. Alors*

$$\mathrm{bary}\Big((A_i, \lambda_i)_{i\in I} \Big) = \mathrm{bary}\Big((G_p, \mu_p)_{1\le p\le s} \Big) \ .$$

Preuve. Cette propriété d'associativité du barycentre résulte des relations suivantes :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{p=1}^{s} (\sum_{i\in I_p} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}) = \sum_{p=1}^{s} (\sum_{i\in I_p} \lambda_i) \overrightarrow{GG_p} = \sum_{p=1}^{s} \mu_p \overrightarrow{GG_p} \ . \qquad \blacksquare$$

2.1.6. Exemples .

a) Soient A et B deux points distincts d'un espace affine $\mathcal{E}$. Choisissons une origine O de $\mathcal{E}$. L'ensemble de tous les barycentres de ces deux points est l'ensemble des points $G = \mathrm{bary}\Big((A, 1-\lambda), (B, \lambda) \Big)$ de $\mathcal{E}$, où $\lambda \in K$. Ces points sont caractérisés par la relation

$$\overrightarrow{OG} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} \ .$$

C'est la droite affine (AB), passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Si le corps des scalaires est $\mathbb{R}$, l'ensemble de ces barycentres pour $\lambda \in [0, 1]$, est appelé *segment* d'extrémités A et B ; on le note $[A, B]$. L'isobarycentre I, obtenu pour $\lambda = \frac{1}{2}$, est appelé *milieu du segment* $[A, B]$. Il est caractérisé par la propriété $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

b) Soit G l'isobarycentre de trois points A, B, C d'un espace affine réel. On l'appelle *centre de gravité du triangle ABC*. Soit I le milieu de $[B, C]$. Par associativité, on a : $G = \text{bary}\Big((A,1),(B,1),(C,1) \Big) = \text{bary}\Big((A,1),(I,2) \Big)$
et donc : $\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI}$.
Ainsi, G est situé sur la médiane $[A, I]$ du triangle ABC , aux deux tiers à partir du sommet A . De la même manière, il est situé sur les médianes du triangle issues de B et C . Nous venons de démontrer que :
Les médianes d'un triangle se coupent au centre de gravité G et le point G est situé aux deux tiers de chacune d'elles en partant du sommet.

2.2. Application affine et barycentre

2.2.1. Proposition . *Considérons des K-espaces vectoriels E et E', des espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ d'espace directeur E et E' respectivement et une application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. L'application f est affine si et seulement si elle respecte les barycentres, i.e. pour tout système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{E}$, tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ on a :*

$$f\left(\text{bary}\Big((A_i, \lambda_i)_{i \in I} \Big) \right) = \text{bary}\Big((f(A_i), \lambda_i)_{i \in I} \Big) \quad .$$

Preuve. Supposons que f est affine.
Considérons le barycentre G du système de points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ et notons G' et A'_i , où $i \in I$, les images de ces points par f. On a

$$\overrightarrow{0} = f^{\#}(\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}) = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{G'A'_i}.$$

Cela prouve que G' est barycentre de $(A'_i, \lambda_i)_{i \in I}$.

Supposons que f respecte les barycentres.
Soient $O \in \mathcal{E}$ fixé et $O' = f(O)$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, notons $v(\overrightarrow{x})$ l'unique vecteur de E' tel que $f(O + \overrightarrow{x}) = O' + v(\overrightarrow{x})$. Montrons que l'application v de E dans E' ainsi définie est linéaire.
Soient $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in E$ et $\lambda, \mu \in K$. Considérons $M = O + \overrightarrow{x}$, $N = O + \overrightarrow{y}$ et posons $M' = f(M)$, $N' = f(N)$. Le barycentre G de $\Big((O, 1-\lambda-\mu)\,,\,(M,\lambda)\,,\,(N,\mu) \Big)$ est tel que $\overrightarrow{OG} = \lambda\overrightarrow{OM} + \mu\overrightarrow{ON} = \lambda\,\overrightarrow{x} + \mu\,\overrightarrow{y}$. D'après l'hypothèse, son image G' est le barycentre de $\Big((O', 1-\lambda-\mu)\,,\,(M',\lambda)\,,\,(N',\mu) \Big)$ et on a $\overrightarrow{O'G'} = \lambda\overrightarrow{O'M'} + \mu\overrightarrow{O'N'} = \lambda\, v(\overrightarrow{x}) + \mu\, v(\overrightarrow{y})$.
Puisque $\overrightarrow{O'G'} = v(\overrightarrow{OG})$, on a bien $\lambda\, v(\overrightarrow{x}) + \mu\, v(\overrightarrow{y}) = v(\lambda\,\overrightarrow{x} + \mu\,\overrightarrow{y})$. ∎

2.2.2. Corollaire . *Soient K un corps de caractéristique différente de 2 (i.e. $1+1 \neq 0$ dans K), E un K-espace vectoriel, $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E et $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *f est involutive : $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.*

(*ii*) *f admet au moins un point fixe et $f^{\#}$ est involutive.*

(*iii*) *f admet au moins un point fixe et $f^{\#}$ est une symétrie vectorielle.*

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soient $A \in \mathcal{E}$ et I l'isobarycentre de A et $f(A)$. On a :

$$f(I) = f\Big(\operatorname{bary}\Big(\,(A,1),(f(A),1)\,\Big)\Big) = \operatorname{bary}\Big(\,(f(A),1),(f \circ f(A),1)\,\Big) = I\ .$$

Donc I est fixe par f. De plus $f^{\#} \circ f^{\#} = (f \circ f)^{\#} = \mathrm{Id}_E$.

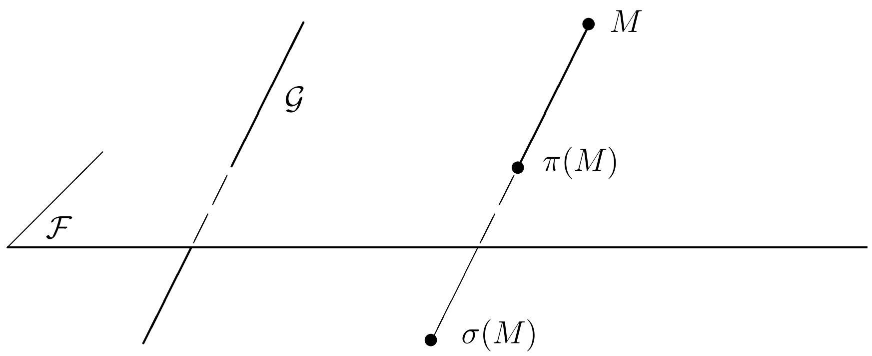
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Un résultat classique d'algèbre linéaire (par exemple en utilisant le théorème des noyaux) assure que les endomorphismes involutifs de E sont les symétries vectorielles et précise que si $f^{\#}$ est involutive, c'est la symétrie vectorielle par rapport à $E_1(f^{\#})$ et parallèlement à $E_{-1}(f^{\#})$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit O un point fixe pour f. L'application affine f^2 laisse fixe O et admet pour application linéaire associée $(f^2)^{\#} = (f^{\#})^2 = \mathrm{Id}_E$, c'est donc l'application identique de $\mathcal{E}$. ∎

2.2.3. Définition . Soient K un corps de caractéristique différente de 2, E un K-espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Considérons des sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$, dont les directions F et G sont supplémentaires dans E. On appelle *symétrie affine* par rapport à $\mathcal{F}$ et parallèlement à $\mathcal{G}$ (ou dans la direction de G), l'automorphisme affine σ ayant $\mathcal{F}$ pour ensemble des points fixes et la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G, pour application linéaire associée.

Si $\mathcal{F}$ est réduit au point A, alors σ est l'homothétie de centre A et de rapport -1, appelée *symétrie centrale* de centre A.

2.2.4. Remarque . Conservons les données de la définition précédente.
Si π est la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$ alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, le point $\pi(M)$ est l'isobarycentre de M et $\sigma(M)$.



2.3. Sous-espace affine et barycentre

2.3.1. Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. Pour que $\mathcal{F}$ soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ appartienne à $\mathcal{F}$.*

Preuve. Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, désignons par G un supplémentaire de sa direction dans E, espace directeur de $\mathcal{E}$, et par π la projection sur $\mathcal{F}$ dans la direction de G. Soient $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ un système de points pondérés de $\mathcal{F}$ et G son barycentre dans $\mathcal{E}$. D'après la proposition 2.2.1, on a : $\pi(G) = \text{bary}\Big((\pi(A_i), \lambda_i)_{i\in I} \Big) = \text{bary}\Big((A_i, \lambda_i)_{i\in I} \Big) = G$.
Donc G appartient à $\mathcal{F}$.

Réciproquement supposons que $\mathcal{F}$ soit stable par barycentres. Soit $A \in \mathcal{F}$. Montrons que l'ensemble F des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, où M décrit $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E. Soient $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ dans F, λ et μ dans K. Alors $G = \text{bary}\Big((A, 1-\lambda-\mu), (M, \lambda), (N, \mu) \Big)$ appartient à $\mathcal{F}$. Donc $\lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AG}$ est élément de F. ∎

2.3.2. Corollaire. *Soit X une partie non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ engendré par X est l'ensemble de tous les barycentres des systèmes de points pondérés de X.*

Preuve. D'après le corollaire précédent, tout barycentre d'un système de points pondérés de X appartient à $\mathcal{F}$.

Réciproquement, montrons que tout point M de $\mathcal{F}$ est barycentre d'éléments de X. Soit A un point de X. D'après le corollaire 1.4.6, il existe une famille finie $(A_i)_{i=1\cdots k}$ de points de X et une famille finie $(\lambda_i)_{i=1\cdots k}$ de scalaires telles que $\overrightarrow{AM} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$. Cette égalité prouve que $M = \text{bary}\Big((A, 1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i), (A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k) \Big)$. ∎

2.3.3. Proposition. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de points d'un espace affine $\mathcal{E}$ d'espace directeur E, et soit $\mathcal{F}$ le sous-espace affine engendré par cette famille. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *Pour tout point $M \in \mathcal{F}$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$ et $M = \text{bary}\Big((A_i, \lambda_i)_{i\in I} \Big)$*

(*ii*) *Pour tout $i \in I$, la famille $\Big(\overrightarrow{A_iA_j}\Big)_{j\in I\setminus\{i\}}$ est libre dans E.*

(*iii*) *Il existe $i \in I$ tel que la famille $\Big(\overrightarrow{A_iA_j}\Big)_{j\in I\setminus\{i\}}$ soit libre dans E.*

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$:

$$\sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{0} .$$

Posons $\lambda_i = 1 - \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j$. Comme $\lambda_i\overrightarrow{A_iA_i} = \overrightarrow{0}$, l'égalité précédente peut alors s'écrire

$$\sum_{j\in I} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{0} .$$

Cette relation prouve que $A_i = \text{bary}\Big((A_j, \lambda_j)_{j\in I} \Big)$ avec $\sum_{j\in I} \lambda_j = 1$; or on a également $A_i = \text{bary}\Big((A_i, 1)\,,\, (Aj, 0)_{j\in I\setminus\{i\}} \Big)$. Par unicité des coefficients on a donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in I\setminus\{i\}$.

L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est évidente.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit $M \in \mathcal{F}$. D'après le corollaire précédent M est barycentre d'un système de points pondérés $(A_j, \lambda_j)_{j\in I}$. Montrons que la famille $(\lambda_j)_{j\in I}$ est unique si l'on impose $\sum_{j\in I} \lambda_j = 1$. En choisissant A_i pour origine on obtient $\overrightarrow{A_iM} = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \lambda_j\overrightarrow{A_iA_j}$ ce qui, par hypothèse, détermine les λ_j pour $j \neq i$ de manière unique ; $\lambda_i = 1 - \sum_{j\neq i} \lambda_j$ est lui aussi uniquement déterminé. ∎

2.3.4. Définitions. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de points d'un espace affine $\mathcal{E}$ d'espace directeur E.

On dit que cette famille est *affinement libre* si les conditions équivalentes de la proposition précédentes sont satisfaites.

On dit que cette famille est un *repère affine* de $\mathcal{E}$, si elle affinement libre et engendre $\mathcal{E}$. Dans ce cas l'unique famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires telle que $M = \text{bary}\Big((A_i, \lambda_i)_{i\in I} \Big)$ avec $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, est appelée *coordonnées barycentriques* du point M dans le repère affine.

2.3.5. Remarque. La proposition précédente, prouve que $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $(A_0\,, \overrightarrow{A_0A_1}\,, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\,)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$. On voit donc que dans un espace affine de dimension n, tous les repères affines sont constitués de $n+1$ points.

2.3.6. Corollaire. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines respectivement sur des K-espaces vectoriels E et E'. Soient $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et $(B_0, \ldots, B_n)$ une famille de points de $\mathcal{E}'$. Alors il existe une unique application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ telle que $f(A_i) = B_i$ pour $i \in [0, n]_{\mathbb{N}}$.*

Preuve. Le corollaire résulte de la remarque précédente et de la proposition 1.2.5. ∎

2.4. Partie convexe d'un espace affine réel

2.4.1. Lemme. *Soit $\mathcal{C}$ une partie d'un espace affine réel $\mathcal{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *Tout barycentre d'un système de points pondérés de $\mathcal{C}$ à coefficients positifs ou nuls, appartient à $\mathcal{C}$.*

(*ii*) *Pour tous points A et B dans $\mathcal{C}$, le segment $[A, B]$ est inclus dans $\mathcal{C}$.*

Preuve. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est immédiate, puisque tout point de $[A, B]$ est barycentre de $\Big(\,(A, \lambda), (B, 1-\lambda)\,\Big)$ avec $\lambda \in [0, 1]$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $(A_i, \lambda_i)_{i=1\cdots k}$ un système de points pondérés de $\mathcal{C}$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1\cdots k$, et soit G le barycentre de cette famille. Sans perte de généralité on peut supprimer les points pondérés où $\lambda_i = 0$ et supposer que $\lambda_i > 0$ pour tout i. Par hypothèse $G_2 = \text{bary}\,\Big(\,(A_1, \lambda_1)\,, (A_2, \lambda_2)\,\Big)$, élément de $[A_1, A_2]$, appartient à $\mathcal{C}$.
Puis, en utilisant l'associativité du barycentre, on obtient que
$G_3 = \text{bary}\,\Big(\,(A_1, \lambda_1)\,, (A_2, \lambda_2)\,, (A_3, \lambda_3)\,\Big) = \text{bary}\,\Big(\,(G_2, \lambda_1 + \lambda_2)\,, (A_3, \lambda_3)\,\Big)$ élément de $[G_2, A_3]$ appartient à $\mathcal{C}$.
Par itération on montre que $G = \text{bary}\,\Big(\,(A_i, \lambda_i)_{i=1\cdots k}\,\Big)$ appartient à C. ∎

2.4.2. Définition. Une partie C d'un espace affine réel $\mathcal{E}$, pour laquelle les conditions équivalentes précédentes sont satisfaites est dite *convexe*.

2.4.3. Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines réels.*

(*i*) *L'intersection d'une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$ est une partie convexe.*

(*ii*) *Si f est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, l'image $f(\mathcal{C})$ de toute partie convexe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est convexe, et l'image réciproque $f^{-1}(\mathcal{C}')$ de toute partie convexe $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{E}'$ est convexe.*

Preuve. L'assertion (i) est évidente.

(ii) Remarquons que f respecte le barycentre et donc, pour tous points M et N de $\mathcal{E}$, on a $f([M,N]) = [f(M), f(N)]$. L'assertion (ii) s'en déduit immédiatement. ∎

2.4.4. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe d'un espace affine réel $\mathcal{E}$, et soit $P \in \mathcal{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tous M et N de $\mathcal{C}$, si P est le milieu de $[M,N]$ alors $M = P = N$.*

(ii) *Pour tous M et N de $\mathcal{C}$, si $P = \operatorname{bary}\Big((M,\lambda), (N, 1-\lambda)\Big)$ avec $\lambda \in]0,1[$ alors $M = P = N$.*

(iii) *Le complémentaire $\mathcal{C}'$ de $\{P\}$ dans $\mathcal{C}$ est convexe.*

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Considérons des points M et N dans $\mathcal{C}$ et un scalaire $\lambda \in]0,1[$ tels que $P = \operatorname{bary}\Big((M,\lambda), (N,1-\lambda)\Big)$. On a donc $\overrightarrow{MP} = (1-\lambda)\overrightarrow{MN} \quad (*)$.
Quitte à échanger M et N, nous pouvons supposer que $\lambda \geq \frac{1}{2}$ (c'est à dire que P est entre M et le milieu du segment $[M,N]$).
Soit $Q = M + 2\overrightarrow{MP} = M + 2(1-\lambda)\overrightarrow{MN}$.
On a $0 < 2(1-\lambda) \leq 1$, par conséquent Q appartient à $[M,N]$, donc à $\mathcal{C}$. Or P est le milieu du segment $[M,Q]$, car

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}\,.$$

Si (i) est vérifiée alors $M = P = Q$ et d'après $(*)$ on a $M = N$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soient M et N dans $\mathcal{C}'$ et $Q \in [M,N]$. Comme C est convexe, le point Q lui appartient. Si $Q = M$ ou $Q = N$ il est clair que $Q \in \mathcal{C}'$, sinon il existe $\lambda \in]0,1[$ tel que $Q = \operatorname{bary}\Big((M,\lambda), (N,1-\lambda)\Big)$ et on ne peut avoir $P = Q$ si (ii) est vérifiée ; donc $Q \in \mathcal{C}'$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Soient M et N des points de $\mathcal{C}$ tels que P soit le milieu de $[M,N]$. D'après la condition (iii), on ne peut avoir simultanément M et N dans $\mathcal{C}'$. On a donc, par exemple, $M = P$ et par suite $N = P$. ∎

2.4.5. Définition. Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe d'un espace affine réel $\mathcal{E}$. Un point P de $\mathcal{C}$ pour lequel les conditions équivalentes précédentes sont satisfaites est appelé un *point extrémal* de C.

2.4.6. Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine réel, $\mathcal{C}$ une partie convexe de $\mathcal{E}$ et f dans* $\operatorname{Aut}(\mathcal{E})$. *Si P est un point extrémal de $\mathcal{C}$, alors $f(P)$ est un point extrémal de $f(\mathcal{C})$.*

Preuve. Soient M' et N' des points de $f(\mathcal{C})$ tels que $f(P)$ soit le milieu de $[M',N']$. Il existe M et N dans $\mathcal{C}$ tels que $f(M) = M'$ et $f(N) = N'$. L'image par f du milieu I de $[M,N]$ est le milieu de $[M',N']$. Donc $f(I) = f(P)$. Puisque f est un automorphisme, on a $P = I$ et P est le milieu de $[M,N]$. Comme P est extrémal dans $\mathcal{C}$, on a $M = P = N$ et par suite $M' = f(P) = N'$. ∎

2.4.7. Définitions . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{E}_n$ l'espace affine réel de dimension n. (Son unicicité, à isomorphisme près, est assuré par l'exemple 1.3.4).
Dans le plan affine $\mathcal{E}_2$, muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, une droite affine $\mathcal{D}$, d'équation $ax + by + c = 0$, détermine deux *demi-plans fermés* : ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que $ax + by + c \geq 0$, respectivement $ax + by + c \leq 0$.

2.4.8. Proposition . *Dans le plan affine $\mathcal{E}_2$, soit $\mathcal{C}$ l'intersection d'un nombre fini de demi-plans fermés. Si $\mathcal{C}$ est non vide, c'est une partie convexe, et ses points extrémaux sont les sommets de $\mathcal{C}$. De même dans $\mathcal{E}_3$, les points extrémaux d'un polyèdre convexe fermé sont les sommets du polyèdre.*

Preuve. Munissons le plan affine $\mathcal{E}_2$, d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Considérons deux droites concourantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, d'équation respective :

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad a'x + b'y + c' = 0 \ .$$

Les demi-plans $\Gamma = \{ M(x, y) \ ; \ ax+by+c \geq 0 \}$ et $\Gamma' = \{ M(x, y) \ ; \ a'x+b'y+c' \geq 0 \}$ sont des parties convexes de $\mathcal{E}_2$ comme image réciproque du convexe $\mathbb{R}^+$ par une application affine. Donc le secteur angulaire $\mathcal{C} = \Gamma \cap \Gamma'$ est une partie convexe. Montrons que le point P d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est un point extrémal de $\mathcal{C}$. Soient M et N dans $\mathcal{C}$ tels que P soit le milieu de $[M, N]$. Traduisons ce fait sur les coordonnées

$$x_P = \frac{1}{2}(x_M + x_N) \quad \text{et} \quad y_P = \frac{1}{2}(y_M + y_N) \ .$$

De plus comme P appartient à $\mathcal{D}$, on a :

$$0 = ax_P + by_p + c = \frac{a}{2}(x_M + x_N) + \frac{b}{2}(y_M + y_N) + c = \frac{1}{2}(ax_M + by_M + c) + \frac{1}{2}(ax_N + by_N + c) \ .$$

Cette somme de deux termes positifs, ne peut être nulle que si $ax_M + by_M + c = 0$ et $ax_N + by_N + c = 0$ i.e. si M et N appartiennent à $\mathcal{D}$. On démontre de même que M et N appartiennent à $\mathcal{D}'$ et par suite $M = P = N$.
Si $\mathcal{C}$ est un polygône convexe, intersection d'un nombre fini de demi-plans fermés, chaque sommet P est point extrémal du secteur angulaire formé par les côtés de $\mathcal{C}$ aboutissant au point P. Il est donc a fortiori extrémal pour $\mathcal{C}$. Par ailleurs, on voit facilement que tout point de $\mathcal{C}$ qui est intérieur à $\mathcal{C}$, ou sur un côté de $\mathcal{C}$ sans être en un sommet, est isobarycentre de deux points distincts de $\mathcal{C}$, et donc n'est pas extrémal pour C . En résumé les sommets sont les seuls points extrémaux.
On montre de même que dans $\mathcal{E}_3$, les points extrémaux d'un polyèdre convexe sont les sommets de ce polyèdre. ∎

3 Géométrie affine euclidienne

3.1. Isométrie affine

3.1.1. Définitions. On appelle *espace affine euclidien*, un espace affine $\mathcal{E}$ dont l'espace directeur E est un espace vectoriel euclidien.

On note d la distance sur $\mathcal{E}$ définie par : $d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\|$, pour tous points M et N de $\mathcal{E}$.

Deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathcal{E}$ sont dits *orthogonaux*, si leurs directions sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux dans E.

On appelle *repère orthonormal* de $\mathcal{E}$, un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ dans lequel $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormale de E.

3.1.2. Proposition. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines euclidiens, ayant même espace directeur E et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *f est isométrique :* $\forall M, N \in \mathcal{E} \quad d(f(M), f(N)) = d(M,N)$.

(*ii*) *$f^{\#}$ est orthogonal :* $f^{\#} \in \boldsymbol{O}(E)$.

(*iii*) *f transforme tout repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, en un repère orthonormal $(f(O), f^{\#}(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f^{\#}(\overrightarrow{e_n}))$ de $\mathcal{E}'$.*

(*iv*) *Il existe un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathcal{E}$, transformé par f en un repère orthonormal $(f(O), f^{\#}(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f^{\#}(\overrightarrow{e_n}))$ de $\mathcal{E}'$.*

Preuve. Pour tous M et N dans $\mathcal{E}$ on a : $d(f(M), f(N)) = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = \|f^{\#}(\overrightarrow{MN})\|$, et tout vecteur de E est de la forme $\overrightarrow{MN}$. Il en résulte l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Les autres équivalences se déduisent de la proposition caractérisant les endomorphismes orthogonaux (3.5.1). ∎

3.1.3. Définition. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines euclidiens, ayant même espace directeur E. Une application affine f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$, satisfaisant aux conditions de la proposition précédente est appelée *isométrie affine*.

On note $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Soit f une isométrie affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. On dit que f est *directe* ou que f est un *déplacement* si $f^{\#}$ appartient à $\boldsymbol{SO}(E)$. Dans le cas contraire on dit que f est *indirecte* ou que f est un *antidéplacement*.
On note $\mathcal{I}^{+}(\mathcal{E})$ (respectivement $\mathcal{I}^{-}(\mathcal{E})$) l'ensemble des déplacements (respectivement antidéplacements) de $\mathcal{E}$.

3.1.4. Exemples. Toute translation est un déplacement. Une homothétie h est une isométrie affine si et seulement si $h = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ ou h est une symétrie centrale.

3.1.5. Corollaire. *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ des espaces affines euclidiens, de même espace directeur et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ un repère orthonormal de $\mathcal{E}$. Pour tout repère orthonormal $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n})$ de $\mathcal{E}'$, il existe une unique isométrie affine f transformant $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$.*

Preuve. D'après la propsition 1.2.5 il existe une unique application affine f transformant $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$. La proposition précédente assure alors que f est une isométrie. ∎

3.1.6. Corollaire. *Un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension finie n, est isomorphe à l'espace affine $\mathcal{E}_n$ obtenu en faisant agir par translations le groupe additif de $E = \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, l'espace vectoriel E étant muni du produit scalaire usuel.*
Autrement dit, à isomorphisme isomométrique près, il existe un seul espace affine euclidien de dimension finie n donnée.

Preuve. Choisissons un repère orthonormal $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$. D'après le corollaire précédent, il existe une unique isométrie affine transformant $\mathcal{R}$ en le repère orthonormal de $\mathbb{R}^n$ constitué, du vecteur nul pour origine, et de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. ∎

3.1.7. Proposition. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-espaces affines d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, dont les directions F et G sont supplémentaires. La symétrie affine σ par rapport à $\mathcal{F}$ et parallèlement à $\mathcal{G}$ est une isométrie affine si et seulement si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux.*

Preuve. Soit E l'espace directeur de $\mathcal{E}$.

Si σ est une isométrie, $\sigma^{\#}$ est un endomorphisme orthogonal et ses sous-espaces propres $E_1(\sigma^{\#}) = F$ et $E_{-1}(\sigma^{\#}) = G$ sont orthogonaux.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux, leurs directions F et G sont orthogonales et $\sigma^{\#}$ est diagonalisable dans une base orthonormale avec $\mathrm{Sp}\left(\sigma^{\#}\right) \subset \{-1, 1\}$. Donc $\sigma^{\#} \in \boldsymbol{O}(E)$. ∎

3.1.8. Définitions. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et F la direction de $\mathcal{F}$. On appelle *symétrie affine orthogonale* par rapport à $\mathcal{F}$, notée $\sigma_{\mathcal{F}}$, la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ et de direction $F^{\perp}$.

Si $\mathcal{F}$ est un hyperplan, on dit que $\sigma_{\mathcal{F}}$ est la *réflexion affine* d'hyperplan $\mathcal{F}$.

3.1.9. Proposition. *Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\sigma_{\mathcal{H}}$ *échange A et B.*

(ii) *$\mathcal{H}$ est l'hyperplan affine passant par I, milieu du segment $[A, B]$, et orthogonal à la droite (AB).*

(iii) $\mathcal{H} = \{\, M \in \mathcal{E} \;;\; d(M, A) = d(M, B) \,\}$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si $\sigma_{\mathcal{H}}(A) = B$, le point I milieu de $[A, \sigma_{\mathcal{H}}(A)]$ appartient à $\mathcal{H}$ et la droite (AB) est orthogonale à $\mathcal{H}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Comme $I \in \mathcal{H}$ et que le vecteur $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{H}$, le point I est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{H}$. Comme de plus I est le milieu de $[A, B]$ on a $\sigma_{\mathcal{H}}(A) = B$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a :

$$d(M,B)^2 - d(M,A)^2 = \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MA}\|^2 = \langle \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\,, \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\,\rangle = 2\,\langle \overrightarrow{MI}\,, \overrightarrow{AB}\,\rangle.$$

Donc M est équidistant de A et B si et seulement si $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ i.e. si M appartient au sous-espace affine passant par I et de direction $\{\overrightarrow{AB}\}^{\perp}$. ∎

3.1.10. Définition. Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. On appelle *hyperplan médiateur* de A et B l'unique hyperplan affine $\mathcal{H}$ satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition précédente.

3.2. Groupe des isométries affines

3.2.1. Théorème. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n.*

(*i*) *L'ensemble $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ des isométries de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{E})$.

(*ii*) *L'ensemble $\mathcal{I}^+(\mathcal{E})$ des déplacements de l'espace affine $\mathcal{E}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{I}(\mathcal{E})$.*

(*iii*) *Le groupe $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R}^n \underset{\alpha}{\times} \boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$ où α est l'action naturelle $(u, \overrightarrow{x}) \longmapsto u(\overrightarrow{x})$ du groupe orthogonal $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ (produit de la matrice u par le vecteur colonne $\overrightarrow{x}$).*

(*iv*) *Le groupe $\mathcal{I}^+(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R}^n \underset{\alpha}{\times} \boldsymbol{SO}_n(\mathbb{R})$ où α est l'action naturelle $(u, \overrightarrow{x}) \longmapsto u(\overrightarrow{x})$ du groupe spécial orthogonal $\boldsymbol{SO}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. (i) L'application linéaire associée à toute isométrie affine f est un endomorphisme orthogonal, donc bijectif ; d'après la proposition 1.3.3, f appartient à $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{E})$. L'ensemble $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ apparaît alors comme image réciproque dans $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{E})$ du sous-groupe $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$ de $\boldsymbol{GL}_n(\mathbb{R})$ par l'homomorphisme de groupes $f \longmapsto f^{\#}$. C'est donc un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{E})$.

(ii) $\mathcal{I}^+(\mathcal{E})$, image réciproque dans $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ du sous-groupe distingué $\boldsymbol{SO}_n(\mathbb{R})$ de $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$ par l'homomorphisme de groupes $f \longmapsto f^{\#}$, est donc un sous-groupe distingué de $\mathcal{I}(\mathcal{E})$.

(*iii*) Soit E l'espace directeur de $\mathcal{E}$. Choisissons une origine O dans $\mathcal{E}$ et une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans E. Posons $K' = \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et $H' = \{\, f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})\ ;\ \ f(O) = O \,\}$.
Alors K' est un sous-groupe, distingué dans $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ et isomorphe à $(E, +)$, donc au groupe $(\mathbb{R}^n, +)$. (A la translation de vecteur $\overrightarrow{a}$ on associe les coordonnées de $\overrightarrow{a}$ dans $\mathcal{B}$).
Grâce à l'application $f \longmapsto f^{\#}$, H' est un sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{O}(E)$, lui-même isomorphe à $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$. (A tout $f \in H'$ on associe $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{\#}\right)$).
On a $K' \cap H' = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$ et $K'H' = \mathcal{I}(\mathcal{E})$ car tout $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ peut se décomposer sous la forme $f = t_{\vec{a}} \circ g$ avec $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f(O)O}$ et $g \in H'$.
Ainsi $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct $K' \underset{\alpha}{\times} H'$ où α est l'homomorphisme de H' dans $\mathrm{Aut}\,(K')$, tel que $\alpha_g(t_{\vec{x}}) = g \circ t_{\vec{x}} \circ g^{-1} = t_{g^{\#}(\vec{x})}$. Identifions K' avec $\mathbb{R}^n$ et H' avec $\boldsymbol{O}_n(\mathbb{R})$ grâce aux isomorphismes explicités précédemment. L'action α apparaît alors comme étant définie par $u.\vec{x} = u(\vec{x})$.

L'assertion (*iv*) se démontre de la même façon que (*iii*). ∎

3.2.2. Remarque . Soit O un point fixé dans $\mathcal{E}$. La démonstration précédente prouve que le groupe $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est isomorphe au produit semi-direct de ses sous-groupes $\mathcal{T}(E)$ et $\{\, f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})\ ;\ \ f(O) = O \,\}$. Toute isométrie affine s'écrit donc de manière unique comme composée d'une translation et d'une isométrie laissant O fixe.

3.2.3. Corollaire . *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Le groupe $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ est engendré par les réflexions affines.*

Preuve. D'après la remarque précédente il suffit de montrer que toute translation et toute isométrie affine ayant un point fixe peuvent se décomposer en produit de réflexions.

Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ admettant un point fixe O. Son application linéaire associée $f^{\#}$ est un endomorphisme orthogonal et peut donc se décomposer en un produit de réflexions (Chap. I 3.7.2) : $f^{\#} = s_1 \circ \cdots \circ s_k$. Pour $j \in [1, k]_{\mathbb{N}}$ notons σ_j la réflexion affine laissant O fixe et telle que $\sigma_j^{\#} = s_j$. La composée $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ a même application linéaire associée que f et laisse fixe O. Donc $f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ (1.2.5).

Si f est une translation distincte de $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, considérons $A \in \mathcal{E}$ et $B = f(A)$. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan médiateur des points A et B. Désignons par $\mathcal{H}'$ l'hyperplan parallèle à $\mathcal{H}$ passant par A. Montrons que $f = \sigma_{\mathcal{H}} \circ \sigma_{\mathcal{H}'}$. Les réflexions affines $\sigma_{\mathcal{H}}$ et $\sigma_{\mathcal{H}'}$ ont même application linéaire associée à savoir la réflexion (vectorielle) par rapport à la direction de $\mathcal{H}$. Donc $(\sigma_{\mathcal{H}} \circ \sigma_{\mathcal{H}'})^{\#} = \mathrm{Id}_E$. De plus $\sigma_{\mathcal{H}} \circ \sigma_{\mathcal{H}'}(A) = \sigma_{\mathcal{H}}(A) = B$. ∎

3.2.4. Théorème . *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Pour toute isométrie affine $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ il existe un couple unique (τ, g) formé d'une translation $\tau \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et d'une isométrie $g \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ admettant un point fixe tel que :*

$$f = \tau \circ g = g \circ \tau \ .$$

Preuve. Soit E l'espace directeur de $\mathcal{E}$. Posons $v = f^{\#}$. Comme $v \in \boldsymbol{O}(E)$ on a pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ les équivalences :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} \in \operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow v(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} \\
&\Leftrightarrow v^* \circ v(\overrightarrow{x}) = v^*(\overrightarrow{x}) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{x} = v^*(\overrightarrow{x}) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in \operatorname{Ker}(v^* - \mathrm{Id}_E) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in \operatorname{Im}(v - \mathrm{Id}_E)^{\perp} \quad \text{(Chap.I 3.3.5)}\ .
\end{aligned}$$

Par conséquent E est la somme directe orthogonale de $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$ et $\operatorname{Im}(v - \mathrm{Id}_E)$.

Existence : Fixons une origine $O \in \mathcal{E}$ et décomposons le vecteur $\overrightarrow{f(O)O} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ avec $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$ et $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Im}(v - \mathrm{Id}_E)$. Il existe alors $\overrightarrow{z} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = v(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}$. Posons $\tau = t_{-\vec{x}}$ et $g = t_{\vec{x}} \circ f$. On a $f = \tau \circ g$. De plus $g^{\#} = f^{\#} = v$ et comme $\overrightarrow{x}$ appartient à $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$, les isométries τ et g commutent (lemme 1.2.9). Montrons que $A = O + \overrightarrow{z}$ est fixe par g.

$$g(A) = t_{\vec{x}} \circ f(O + \overrightarrow{z}) = f(O) + v(\overrightarrow{z}) + \overrightarrow{x} = f(O) + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} + \overrightarrow{x} = O + \overrightarrow{z} = A\,.$$

Unicité : Si $f = \tau \circ g = g \circ \tau$ avec $\tau = t_{\vec{x}}$, alors $g^{\#} = f^{\#} = v$ et $\overrightarrow{x}$ appartient à $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$. Soit $f = \tau' \circ g' = g' \circ \tau'$ une autre décomposition avec $\tau' = t_{\vec{x}'}$. Désignons par A et A' des points fixes de g et g' respectivement. On a :

$$f(A) = A + \overrightarrow{x} \quad \text{et} \quad f(A') = A' + \overrightarrow{x'}\,,\ \text{d'où} \quad v(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{f(A)f(A')} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x}\,.$$

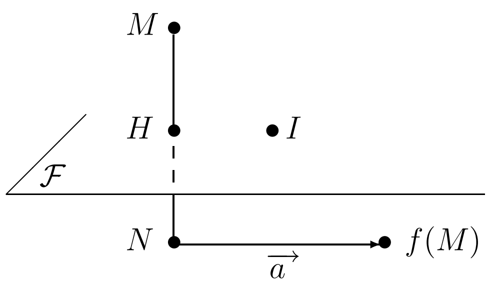
Cela montre que le vecteur $\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x}$ appartient à $\operatorname{Im}(v - \mathrm{Id}_E)$. Or ce vecteur appartient aussi à $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$; il est donc nul, puisque les sous-espaces vectoriels sont orthogonaux. Donc $\tau' = \tau$ et par suite $g = g'$. ∎

3.2.5. Définitions. La décomposition $f = \tau \circ g = g \circ \tau$ de l'isométrie affine f, établie dans le théorème précédent, est appelée *décomposition canonique* de f.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, distinct de $\mathcal{E}$. Une isométrie affine f de décomposition canonique $f = \tau \circ g$ avec τ translation de vecteur $\overrightarrow{a}$ non nul, et $g = \sigma_{\mathcal{F}}$, symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$, est appelée *symétrie glissée* relativement à $\mathcal{F}$ et de vecteur $\overrightarrow{a}$.

3.2.6. Proposition. *Soit f la symétrie glissée relativement à $\mathcal{F}$ et de vecteur $\overrightarrow{a}$. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, le milieu I de $[M, f(M)]$ appartient à $\mathcal{F}$.*

Preuve. Soient H l'image de M par la projection orthogonale sur $\mathcal{F}$ et N l'image de M par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$. Posons $h = h(M, \frac{1}{2})$. On a $f(M) = N + \overrightarrow{a}$ et $h(N) = H$. D'où $I = h(f(M)) = H + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$ appartient à $\mathcal{F}$.



∎

3.3. Classification des isométries du plan et de l'espace

3.3.1. Remarque. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n, et $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$. Traduisons les résultats démontrés précédemment dans un repère orthonormal bien choisi. Prenons pour origine un point fixe O de l'isométrie g intervenant dans la décomposition canonique $f = \tau \circ g$ de f. Choisissons une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{\#}\right)$ soit diagonale par blocs (Chap I 3.6.8) avec dans cet ordre, k blocs de 1, ℓ blocs de -1 et m matrices de rotation R_θ ($k = \dim(E_1(f^{\#}))$, $\ell = \dim(E_{-1}(f^{\#}))$ avec $(k, \ell, m) \in \mathbb{N}^3$ et $k + \ell + 2m = n$).
L'expression analytique de f dans le repère orthonormal $(O, \mathcal{B})$ est donc :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{b}$ de la translation τ appartient à $E_1(f^{\#})$ on a $b_j = 0$ pour $j > k$.
L'isométrie f est un déplacement si et seulement si ℓ est pair.
Si $k = 0$ l'isométrie f admet un unique point fixe. (lemme 1.2.7)

3.3.2. Proposition. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine euclidienne.*

(*i*) *Les déplacements de $\mathcal{D}$ sont les translations.*

(*ii*) *Les antidéplacements de $\mathcal{D}$ sont symétries centrales.*

Preuve. La remarque précédente permet de conclure immédiatement. ∎

3.3.3. Définitions. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E, espace vectoriel réel. On dit que $\mathcal{E}$ est *orienté* si l'on a choisi une orientation sur E.

On appelle *axe* toute droite affine réelle orienté.

Soient $\mathcal{D}$ une droite affine et $\mathcal{P}$ un plan affine dans $\mathcal{E}$ espace affine réel de dimension 3, dont les directions sont supplémentaires. Si $\mathcal{D}$ est orientée par la donnée d'un vecteur directeur $\overrightarrow{\imath}$, on supposera toujours que $\mathcal{P}$ est muni de l'*orientation compatible* avec celle de $\mathcal{D}$: i.e. une base $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ de $\mathcal{P}$ est directe si et seulement si $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ (ou ce qui revient au même $(\overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{\imath})$) est une base directe de $\mathcal{E}$.

3.3.4. Définition. Soient O un point d'un plan affine euclidien orienté et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation (affine) plane de centre O* et d'angle θ, l'isométrie affine laissant fixe O et d'application linéaire associée la rotation vectorielle d'angle θ.

3.3.5. Théorème. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté.*

(*i*) *Les déplacements de $\mathcal{P}$ sont les translations et les rotations planes.*

(*ii*) *Les antidéplacements de $\mathcal{P}$ sont les réflexions affines (symétries orthogonales par rapport à une droite) et les symétries glissées relativement à une droite affine.*

Preuve. Reprenons les notations de la remarque 3.3.1 .

(i) Si $\ell = 2$ alors $A = -I_2$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. f est la symétrie centrale (ou rotation d'angle π) de centre O.
Si $\ell = 0$, soit $k = 2$ et $m = 0$, d'où $A = I_2$ et alors f est la translation de vecteur $\overrightarrow{b}$, soit $k = 0$ et $m = 1$, d'où $A = R_\theta$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ et alors f est la rotation de centre O et d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

(ii) Nécessairement $\ell = 1$ d'où $k = 1$ et $m = 0$. Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Si $b_1 = 0$ alors f est une réflexion affine.
Si $b_1 \neq 0$ alors f est une symétrie glissée relativement à une droite affine. ∎

3.3.6. Lemme. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3 et $f \neq \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ un déplacement de $\mathcal{E}$ admettant au moins un point fixe.*

(*i*) *L'ensemble des point fixes de f est une droite affine $\mathcal{D}$.*

(*ii*) *Si nous orientons $\mathcal{D}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ tel que la restriction de f à tout plan affine $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$, muni de l'orientation compatible, soit une rotation plane d'angle θ, de centre le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.*

Preuve. (i) La dimension du sous-espace affine des points fixes de f est $k = \dim(E_1(f^\#))$. Puisque $f \in \mathcal{I}^+(\mathcal{E})$, $\ell = \dim(E_{-1}(f^\#))$ est pair et on doit avoir $k + \ell + 2m = 3$, d'où k est impair. Or par hypothèse $k = 3$ est exclu, donc $k = 1$.

(ii) On oriente $\mathcal{D}$ par le choix d'un vecteur directeur.
La direction D de $\mathcal{D}$ étant stable par $f^\#$, son orthogonal $P = D^\perp$ qui est la direction de tout plan affine orthogonal à $\mathcal{D}$ est également stable par $f^\#$. Par restriction $f^\#$ définit sur P un endomorphisme orthogonal. Cet endomorphisme appartient à $\boldsymbol{SO}(P)$, c'est donc une rotation vectorielle r distincte de Id_P.
Soient $O \in \mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par O. L'image de $\mathcal{P}$ par f est le sous-espace affine passant par $f(O)$ et de direction $f^\#(P)$; c'est donc $\mathcal{P}$. Par restriction f définit sur $\mathcal{P}$ une isométrie g laissant fixe O et ayant pour application linéaire associée r (indépendante de O). Si $\mathcal{P}$ est muni de l'orientation compatible avec celle de $\mathcal{D}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ telle que g soit la rotation plane de centre O et d'angle θ. ∎

3.3.7. Définitions. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3.

Soient $\mathcal{D}$ un axe de $\mathcal{E}$ et θ un réel. On appelle *rotation axiale*, d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ, le déplacement laissant fixe $\mathcal{D}$ et dont la restriction à tout plan affine $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ est une rotation plane d'angle θ.
Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ est $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.
Si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$ la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$; on l'appelle *demi-tour* d'axe $\mathcal{D}$.

Soient $\mathcal{D}$ un axe de $\mathcal{E}$, θ un réel et $\overrightarrow{a}$ un vecteur de la direction de $\mathcal{D}$. On appelle *vissage* d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ et de vecteur $\overrightarrow{a}$, la composée (commutative) de la rotation d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ et de la translation de vecteur $\overrightarrow{a}$.

Soient $\mathcal{D}$ un axe de $\mathcal{E}$, θ un réel, O un point de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à $\mathcal{D}$ passant par O. On appelle *symétrie-rotation* de centre O, d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ, la composée (commutative) de la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$ et de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.

3.3.8. Théorème. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, orienté de dimension 3.*
Les isométries de $\mathcal{E}$ sont classifiées dans le tableau suivant :

	Déplacement			**Antidéplacement**		
$\dim(E_1)$	3	1	1	2	0	0
$\dim(E_{-1})$	0	0	2	1	1	3
Existence de points fixes	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	rotation axiale d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	demi-tour (symétrie axiale)	réflexion (symétrie plane)	rotation-symétrie d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$	symétrie centrale
Aucun point fixe	translation de vecteur non nul	vissage d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ et de vecteur non nul	symétrie axiale glissée	symétrie plane glissée		

Preuve. Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$ et soit $f = \tau \circ g$ sa décomposition canonique. Classifions d'abord les déplacements.
Soit $f \in \mathcal{I}(\mathcal{E})$. Si $\dim(E_1) = k = 3$ alors $g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et f est une translation, sinon d'après le lemme 3.3.6, g est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$; de plus la translation doit être dans la direction de $\mathcal{D}$, donc f est un vissage.

Si $f \in \mathcal{I}^-(\mathcal{E})$ alors ℓ est impaire. Si $\ell = 3$ on a $k = 0$ et f admet un unique point fixe,

c'est une symétrie centrale.
Sinon $\ell = 1$ et on a $k = 2$ ou $k = 0$.
Si $k = 2$ alors $f^{\#}$ est diagonalisable, g est une réflexion et f une réflexion ou une symétrie plane glissée selon l'existence ou non de point fixe.
Si $k = 0$ alors f admet un unique point fixe O. Soit $\mathcal{D}$ la doite passant par O et de direction E_{-1}. Le plan P, orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$, est stable par $f^{\#}$ et sans vecteur propre ; par conséquent la restriction de $f^{\#}$ à P est une rotation vectorielle d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Il en résulte que f est une rotation-symétrie. ∎

3.3.9. Corollaire . *Les déplacements d'un espace affine euclidien de dimension 3 sont les vissages*

Preuve. Immédiat. ∎

Index