Université d'Orléans
Mathématiques
3MT12

Examen du 7 janvier 2013
corrigé abrégé

Questions de cours

* Un espace affine dirigé par un espace vectoriel $\vec{E}$ est un ensemble E sur lequel le groupe additif $(\vec{E},+)$ agit (à droite) librement et transitivement.

* On dit qu'une partie K d'un espace affine E est convexe si

$$A, B \in K \implies [AB] \subset K$$

où le segment $[AB]$ est l'ensemble des combinaisons convexes $(1-\lambda)A + \lambda B$, où $\lambda \in [0,1]$.

Exercice 1

1) Si $f(x) = Ax + b$ où $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^n$

et $g(y) = By + c$ où $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $c \in \mathbb{R}^p$,

alors
$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= B(Ax+b)+c \\ &= BAx + Bb + c \\ &= Cx + d \quad \text{où } C = BA \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \text{ et } d = Bb + c \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

2) On va montrer que l'application affine f est bijective ssi sa partie linéaire $A = f^{\#}$ est bijective

Si f est bijective :

i) A est injective : si $A\vec{x} = \vec{0}$, on écrit $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$. Alors $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = A\vec{x} = \vec{0}$ donc $f(P) = f(Q)$, donc $P = Q$ et $\vec{x} = \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$

ii) A est surjective : soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on écrit $\vec{y} = \overrightarrow{PQ}$. Il existe P', Q' tels que $P = f(P')$ et $Q = f(Q')$. Alors $\vec{y} = \overrightarrow{f(P')f(Q')} = A\overrightarrow{P'Q'}$

Si A est bijective, on sait que $B = A^{-1}$ est linéaire. On a
$$\begin{aligned} y &= f(x) = Ax + b \\ Ax &= y - b \\ x &= A^{-1}(y-b) = A^{-1}y - A^{-1}b \end{aligned}$$
Donc f admet l'application affine g telle que $g(y) = A^{-1}y - A^{-1}b$ comme application réciproque. Elle est donc bijective.

3) On montre que G est un sous-groupe du groupe $\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ des bijections de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$f, g \in G \implies f \circ g \in G \quad \text{d'après 1)}$$
$$f \in G \implies f^{-1} \in G \quad \text{d'après 2)}$$

4) On a montré en 1) que la partie linéaire de $g \circ f$ est $B \circ A$. Avec les notations du cours, cela s'écrit $(g \circ f)^{\#} = g^{\#} \circ f^{\#}$

L'application $f \mapsto f^{\#}$ est donc un morphisme de G dans $GL(n, \mathbb{R})$.

Son noyau $N = \{f \in G : f^{\#} = Id_{\mathbb{R}^n}\}$. Donc $f \in N$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = x + b$: f est une translation τ_b

Donc $N = \{\tau_b : b \in \mathbb{R}^n\}$

Exercice 2

1) P appartient à la droite D ssi $\overrightarrow{AP}$ est proportionnel à $\overrightarrow{AB}$.

Avec $P = (x, y)$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et cela est équivalent à $\det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ou encore $x - 2 + y - 1 = x + y - 3 = 0$

2) P appartient à la droite Δ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = C + \lambda \overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

3) Les droites D et Δ ne sont pas parallèles car $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels. Elles ont donc un point d'intersection. On trouve

$$P \in \Delta \implies \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad P \in D \implies (-2+\lambda) + (-1+2\lambda) - 3 = 0$$
d'où $\lambda = 2$

Cela donne $(x = 0, y = 3)$

Exercice 3

1) Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels, les points A, B et C ne sont pas alignés. Ils engendrent un plan affine F.

2) P appartient à F $\iff \overrightarrow{AP} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Avec $P = (x, y, z)$ $\iff \det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

cela donne $\iff \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -x-y-z+7 = 0$

Exercice 4

1) Soient $M, N \in E$. On a

$$\overrightarrow{Mf(M)} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$
$$\overrightarrow{Nf(N)} = 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{Nf(N)} - \overrightarrow{Mf(M)} + \overrightarrow{MN} \\ &= 3(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{MA}) + 2(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MN} \\ &= 3\overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NM} \\ &= 5\overrightarrow{NM} = -5\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Ceci montre que f est une application affine avec $\vec{f} = -5\,\mathrm{Id}_{\vec{E}}$.

f est donc une homothétie affine de rapport -5.

2) Soient $M, N \in E$. On a

$$\overrightarrow{Mg(M)} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$
$$\overrightarrow{Ng(N)} = 3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}$$

D'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g(M)g(N)} &= \overrightarrow{Ng(N)} - \overrightarrow{Mg(M)} + \overrightarrow{MN} \\ &= \overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Ceci montre que g est une application affine avec $\vec{g} = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$.

g est donc une translation $\tau_{\vec{a}}$ où $\vec{a}$ se calcule comme

$\vec{a} = \overrightarrow{Mg(M)} = 2(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

Exercice 5

1) Par définition

$$G = \text{Isobary}(A_1, \dots, A_n) \iff \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$$G' = \text{Isobary}(A_1, \dots, B_n) \iff \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{G'B_i} = \vec{0}$$

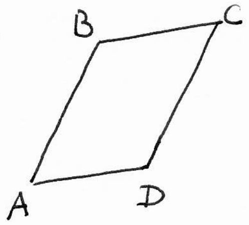
Si $G = G'$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iG} + \overrightarrow{GB_i}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iG} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GB_i} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = \vec{0}$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GB_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = 0$$

Donc $G = G'$ est le isobarycentre de $(B_1, \dots, B_n)$.

2) 

parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (1)

Rappelons que le milieu d'un segment est l'isobarycentre de ses extrémités. Donc d'après 1)

$[AC]$ et $[BD]$ ont m̂ milieu $\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ (2)

on voit que (1) et (2) sont équivalentes.

3) Soit $f : E \to F$ une application affine et $ABCD$ un parallélogramme de E. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont donc même milieu.

Comme une application affine respecte les barycentres, les diagonales $[f(A)f(C)]$ et $[f(B)f(D)]$ du ~~parallélogramme~~ quadrilatère $f(A)f(B)f(C)f(D)$ ont m̂ milieu.

Ce quadrilatère est donc un parallélogramme.

Exercice 6

1) On sait que $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.

On montre que C_n est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$:

d'abord $z^n = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow z \neq 0$: $C_n \subset \mathbb{C}^*$

$$\begin{cases} z^n = 1 \\ w^n = 1 \end{cases} \Rightarrow (wz)^n = w^n z^n = 1 \Rightarrow wz \in C_n$$

$$z^n = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)^n = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \in C_n$$

Donc C_n est un groupe.

Comme l'équation $z^n = 1$ a n racines distinctes $e^{2i\pi \frac{k}{n}}$ où $k = 0, 1, \dots, n-1$, C_n a n éléments : $|C_n| = n$

2) Soit $w = e^{2i\pi \frac{1}{n}}$

Alors $C_n = \{ w^k : k = 0, 1, \dots, n-1 \}$

$$\frac{1}{n}(1 + w + \dots + w^{n-1}) = \frac{1}{n} \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0$$

L'isobarycentre de C_n est donc O.