Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L3MT12

2 Décembre 2013

Feuille d'exercices n^0 8

Exercice 1
Exprimer le symétrique de $z \in \mathbf{C}$ par rapport à la première bissectrice.

Exercice 2
Montrer que les points d'affixes a_1, a_2, a_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$.

Exercice 3
Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle dont les sommets ont pour affixes a_1, a_2, a_3. Exprimer le résultat sous une forme symétrique.

Exercice 4
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c \in \mathbf{C}$ pour que $az + b\overline{z} + c = 0$ soit l'équation d'une droite.

Exercice 5
Soit $a \in \mathbf{C}^*$. Montrer que tous les cercles qui passent par a et par $1/\overline{a}$ coupent le cercle $|z| = 1$ à angle droit.

Exercice 6
1) Démontrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ définit une bijection de $\mathbf{C} \setminus \{-i\}$ sur $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ et que l'application réciproque est l'application $w \mapsto i\dfrac{1+w}{1-w}$
2) On note $\mathcal{D}$ le disque unité ouvert $|z| < 1$ et $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré $\Im z > 0$. Démontrer géométriquement que $z \in \mathcal{H}$ si et seulement si $\dfrac{z-i}{z+i} \in \mathcal{D}$. En déduire une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 7

1) Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{-i\}$. Démontrer géométriquement que $\left|\dfrac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ si et seulement si $z \in \mathbf{R}$.

2) Soit $a \in \mathbf{R}$. Démontrer que les racines de l'équation $\left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \dfrac{1+ia}{1-ia}$ sont les $x_k = \tan\dfrac{\alpha + k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, où $\tan\alpha = a$ et $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$.