Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L3MT12

27 Novembre 2013

Feuille d'exercices n^0 7

Exercice 1
Soient ABC un triangle d'un plan affine E et trois points P, Q et R appartenant respectivement aux droites (BC), (AC) et (AB), distincts des sommets. On désigne par h_1 l'homothétie de centre P transformant B en C, par h_2 l'homothétie de centre Q transformant C en A et par h_3 l'homothétie de centre R transformant A en B. On pose $f = h_3 \circ h_2 \circ h_1$.
1) Déterminer l'image du point B par f.
2) Montrer que si P, Q et R sont alignés, on a la relation de Ménélaüs :

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = 1$$

3) Etudier la réciproque.

Exercice 2
Soit E un espace affine réel.
1) Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$ des points de E. Montrer que $(A_1, \ldots, A_k)$ et $(B_1, \ldots, B_k)$ ont même isobarycentre si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{A_i B_i} = \vec{0}.$$

2) Soient A, B, C, D des points de E. On dit que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
3) Montrer que l'image d'un parallélogramme par une application affine est un parallélogramme.

Exercice 3
On se donne six points A, B, C, A', B', C' d'un espace affine. On désigne par G [respectivement G'] l'isobarycentre de (A, B, C) [respectivement (A', B', C')] et par D, E, F les isobarycentres respectifs de (A', B, C), (A, B', C) et (A, B, C'). On considère enfin H isobarycentre de (D, E, F). Montrer que $\overrightarrow{HG'} = -2\overrightarrow{HG}$.

Exercice 4
Soient A, B et C des points d'un espace affine E.
1) Préciser la nature de l'application f qui à tout point $M \in E$ associe $M' \in E$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

2) Préciser la nature de l'application g qui à tout point $M \in E$ associe $M' \in E$ tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}.$$

Exercice 5
Soient A, B et C trois points distincts d'un espace affine $(E, \vec{E})$ et $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$. On désigne par f_σ l'application de E dans lui-même qui au point M associe le point M' barycentre de $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma), (M, 1))$
1) Montrer que f_σ est une application affine dont on déterminera l'application linéaire associée. Selon les valeurs de $\alpha + \beta + \gamma$, préciser la nature de f_σ.
2) Soit $\vec{u} \in \vec{E}$. Existe-t-il $\sigma \in \mathbf{R}^3$ tel que f_σ soit la translation $\tau_{\vec{a}}$?
3) Soit $\Omega \in E$ et $k > 0$. Existe-t-il $\sigma \in \mathbf{R}^3$ tel que f_σ soit l'homothétie de centre Ω et de rapport k ?

Exercice 6
On se place dans $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure affine canonique et on utilise la bijection canonique entre $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{C}$ qui au point $A = (a, b) \in \mathbf{R}^2$ associe son affixe $a + ib \in \mathbf{C}$.
1) Donner l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)$ en fonction des affixes de $A_1, \ldots, A_n$. Donner l'affixe de l'isobarycentre des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.
2) On dit qu'un nombre complexe est racine primitive $n^{\text{èmes}}$ de l'unité s'il engendre le groupe C_n des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Donner l'affixe de l'isobarycentre des racines primitives $15^{\text{èmes}}$ de l'unité ?