Université d'Orléans 18 Novembre 2013
Département de Mathématiques
L3MT12

Feuille d'exercices n^0 6

Exercice 1
Soit E et E' deux espaces affines et $f, g : E \to E'$ deux applications affines. Montrer que f et g ont la même partie linéaire si et seulement si il existe une translation t telle que $g = t \circ f$.

Exercice 2
Soit E un espaces affine et $f : E \to E$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
(i) f est une translation ;
(ii) f est affine et sa partie linéaire $f^\# = Id_{\vec{E}}$;
(iii) f commute avec toutes les translations.
En déduire le centre du groupe affine $GA(E)$ (le centre d'un groupe G est le sous-ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G).

Exercice 3
Soit E le plan affine. On considère deux homothéties h_1 et h_2 de centre respectif A_1 et A_2 et de même rapport $\lambda \neq 0$. Quelle est la nature géométrique de la transformation $f = h_2 \circ h_1^{-1}$?

Exercice 4
Soit E un espace affine dirigé par l'espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension n. On suppose donné un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de $\vec{E}$. On considère une application affine $f : E \to E$.
1) Expliciter f sous forme matricielle dans le repère $\mathcal{R}$.
2) A tout point $X \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{R}}$ on associe $\Psi(X) = (1, x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Ecrire $\Psi(X + \vec{a})$ où $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{B}}$.
3) Ecrire $\Psi(f(X))$.
4) En déduire une expression matricielle de l'application $\Psi(X) \mapsto \Psi(f(X))$. On note A_f la matrice obtenue.
5) Si $f, g : E \to E$ sont deux applications affines, calculer $A_{f \circ g}$ en fonction de A_f et de A_g.

Exercice 5
Soit $(E, \vec{E})$ un espace affine. Etant donnés $A \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit l'homothétie $h = h(A, \lambda)$ de centre A et de rapport λ comme l'application $h : E \to E$ telle que $h(M) = A + \lambda\overrightarrow{AM}$.
1) Montrer que h est une application affine.
2) On note $t = t_{\vec{a}}$ la translation de vecteur $\vec{a}$. Montrer que $t \circ h$ et $h \circ t$ sont des homothéties dont on précisera le rapport.

Exercice 6
Soit $(E, \vec{E})$ un espaces affine de dimension finie et H un hyperplan affine. Etant donnés deux point M et N de E, on note $[M, N]$ le segment qui les joint. On définit sur $E \setminus H$ la relation R par

$$M \,\mathcal{R}\, N \quad \Leftrightarrow \quad [MN] \cap H = \emptyset.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Montrer qu'il existe exactement deux classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence.

Exercice 7
Soit E un espaces affine et $f : E \to E$ une application affine. Soit Δ une droite de E. Montrer que l'ensemble des milieux des segments $[Mf(M)]$, pour M parcourant Δ, est une droite affine ou un point.

Exercice 8
Soit E un espace affine. Etant donné $A \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $h(A, \lambda)$ l'homothétie de centre A et de rapport λ.
1) Etudier la composée $h \circ h'$ de deux homothéties $h = h(A, \lambda)$ et $h' = h(A', \lambda')$.
2) On suppose $\lambda\lambda' \neq 1$. A tout point $M \in E$, on associe l'unique point fixe, noté $f(M)$, de $h(A, \lambda) \circ h(M, \lambda')$. Montrer que l'application f ainsi obtenue est affine et caractériser géométriquement f.