Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L3MT12

13 Octobre 2013

Feuille d'exercices n^0 4

Exercice 1
Soit E le plan de la géométrie d'Euclide.

1) On dit que des couples de points (A, B) et (C, D) sont équipollents si $ACDBA$ est un parallélogramme. Montrer que l'équipollence est une relation d'équivalence R sur $E \times E$.

On note $\vec{E}$ l'ensemble quotient. On appelle *vecteur* la classe d'équivalence de (A, B) et on la note $\overrightarrow{AB}$.

2) Montrer que la formule $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ définit une loi de groupe commutatif sur $\vec{E}$.
3) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $(A, B) \in E \times E$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ où A' et B' sont les images respectives de A et de B par une homothétie de rapport λ ne dépend que de λ et de $\overrightarrow{AB}$. On le note $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Montrer que cette multiplication scalaire fait de $\vec{E}$ un espace vectoriel réel.

Exercice 2
Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ telles que $\int_0^1 f(x)dx = 1$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ des fonctions continues $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ telles que $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Exercice 3
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des primitives $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de f est un espace affine. Quelle est sa dimension ?

Exercice 4
Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan affine E.
1) Montrer que $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\mathcal{R}' = (B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ sont des repères affines de E.
2) Soient (x, y) les coordonnées d'un point P dans le repère $\mathcal{R}$ et (x', y') ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$. Calculer x' et y' en fonction de x et y.
3) Donner une description de l'ensemble des points de E dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont les mêmes.

Exercice 5

Soit E un plan affine muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Soient $P = (a, b)_{\mathcal{R}}$ et $Q = (c, d)_{\mathcal{R}}$ deux points distincts de E et $\vec{u} = (x, y)_{\mathcal{B}}$ un vecteur de $\vec{E}$.
1) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite passant par P et Q.
2) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite passant par P et de direction $\vec{u}$.

Exercice 6

Soit E un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Soient $A = (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{R}}$, $B = (b_1, b_2, b_3)_{\mathcal{R}}$ et $C = (c_1, c_2, c_3)_{\mathcal{R}}$ trois points non alignés de E et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{E}$.
1) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite passant par A et B.
2) Donner une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la droite passant par A et de direction $\vec{u}$.
3) Donner une équation du plan passant par A, B et C.
4) Donner une équation du plan passant par A et engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$.