

Feuille d'exercices n° 3

**Exercice 1**

Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe  $G$ .

- 1) Montrer que  $H$  est distingué si et seulement si pour tout  $g \in G$ , les ensembles  $gH$  et  $Hg$  coïncident.
- 2) Montrer que si  $[G : H] = 2$ , alors  $H$  est distingué.

**Exercice 2**

On définit le centre d'un groupe  $G$  comme l'ensemble

$$Z(G) = \{z \in G : \forall g \in G, zg = gz\}.$$

- 1) Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe distingué de  $G$ .
- 2) Déterminer le centre du groupe symétrique  $\mathcal{S}_3$ .
- 3) Déterminer le centre du groupe diédral  $D_4$ .
- 4) Déterminer le centre du groupe  $GL(2, \mathbf{R})$ , puis  $GL(3, \mathbf{R})$ .

**Exercice 3**

Soit  $G$  un groupe. On fait agir  $G$  sur l'ensemble  $X$  de ses sous-groupes par conjugaison (voir l'exercice 4 de la feuille 2). Le stabilisateur d'un sous-groupe  $H$  est appelé le normalisateur de  $H$  et est noté  $N_G(H)$ .

- 1) Montrer que  $N_G(H)$  est, pour l'inclusion, le plus grand sous-groupe de  $G$  dont  $H$  soit un sous-groupe distingué.
- 2) Déterminer  $N_G(H)$  pour  $G = \mathcal{S}_3$  et  $H$  est le sous-groupe engendré par la transposition  $(1, 2)$ .
- 3) Soit  $K$  un sous-groupe de  $N_G(H)$ . Montrer que  $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$  est un sous-groupe de  $G$ .