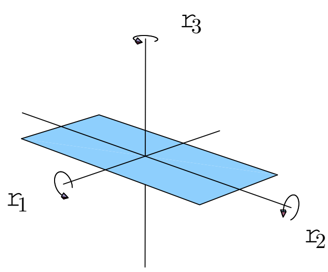
Université d'Orléans 25 Septembre 2013
Département de Mathématiques
L3MT12

Feuille d'exercices n^0 2

Exercice 1
On appelle ordre d'un groupe son nombre d'éléments.
1) Montrer qu'il existe un et un seul groupe d'ordre 2.
2) Montrer qu'il existe un et un seul groupe d'ordre 3.
3) Montrer qu'il existe deux groupes d'ordre 4
4) Montrer qu'il existe un et un seul groupe d'ordre 5.

Exercice 2
Par définition, le groupe affine G de $\mathbf{R}$ (voir l'exercice 4 de la feuille 1) agit sur $\mathbf{R}$ (ce groupe est souvent appelé le groupe $ax + b$).
1) Montrer que cette action est transitive.
2) Déterminer le stabilisateur $H = G(0)$ de 0.
3) Le sous-groupe H est-il distingué ?
4) Identifier l'ensemble quotient G/H.
5) Montrer que les translations de $\mathbf{R}$ forment un sous-groupe distingué N de G.
6) Montrer que le groupe quotient G/N s'identifie à H.

Exercice 3
1) Ecrire la table de multiplication du groupe cyclique $C_4 = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\}$.
2) Ecrire la table de multiplication du groupe des symétries du rectangle $\mathbf{V} = \{e, \sigma_x, \sigma_y, \sigma\}$, où σ_x et σ_y sont respectivement les réflexions par rapport aux axes Ox et Oy et σ la symétrie par rapport à O.
3) Montrer que les groupes C_4 et $\mathbf{V}$ ne sont pas isomorphes, bien que ces deux groupes aient tous les deux 4 éléments.
4) Ecrire les matrices des éléments de V dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Vérifier que l'ensemble de ces matrices est un sous-groupe de $GL(2, \mathbf{R})$ isomorphe à V.
5) Considérer les rotations $\{Id, r_1, r_2, r_3\}$ de $\mathbf{R}^3$ qui laissent invariant le rectangle :

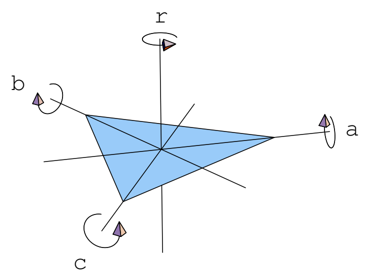


Ecrire les matrices de ces rotations dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Vérifier que l'ensemble de ces matrices est un sous-groupe de $GL(3, \mathbf{R})$ isomorphe à V.

Exercice 4

1) On considère dans $\mathbf{R}^2$ le triangle équilatéral de sommets $A = (1, 0)$, $B = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ et $C = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$. Montrer que les symétries de ce triangle forment un groupe à 6 éléments. Donner les matrices dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$ de ces 6 symétries de ce triangle.

2) On considère dans $\mathbf{R}^3$ le triangle équilatéral de sommets $A = (1, 0, 0)$, $B = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ et $C = (-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$. Donner les matrices des 6 symétries de ce triangle.



Exercice 5 Soit G un groupe et X l'ensemble de ses sous-groupes.

1) Montrer que l'application $\varphi : G \times X \to X$ qui envoie (g, H) sur gHg^{-1} est une action de G sur X (cette action est appelée action par conjugaison). (Vérifier d'abord que gHg^{-1} est bien un sous-groupe de G !).

2) Soit $G = \mathcal{S}_3$ le groupe des bijections de $\{1, 2, 3\}$. Montrer que l'ensemble X de ses sous-groupes a 6 éléments et 4 orbites pour cette action.

Exercice 6

On dispose de 3 pots de peinture de couleurs différentes (rouge, bleue, jaune). Combien y a t'il de façons de peindre les faces d'un cube (chaque face ayant la même couleur).

Exercice 7

Combien de colliers différents peut-on faire avec :

1) 2 perles rouges, 2 perles vertes et 2 perles bleues ;

2) 4 perles rouges, 3 perles blanches et 2 perles jaunes ?