Université d'Orléans
Département de Mathématiques
L3MT12

9 septembre 2013

Feuille d'exercices n^0 1

Exercice 1

a) Montrer que l'ensemble des symétries du carré $\mathcal{R} = \{e, r, r^2, r^3\}$ est un groupe pour la composition des symétries.

b) Montrer que l'ensemble des nombres complexes $C_4 = \{i, -1, -i, 1\}$ est un groupe pour la multiplication des nombres complexes.

c) Montrer que les groupes $\mathcal{R}$, C_4 et $\mathbf{Z}_4$ sont isomorphes.

Exercice 2

Une isométrie de $\mathbf{R}^3$ est une bijection $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ telle que pour tous $x, y \in \mathbf{R}^3$, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne. Montrer que l'ensemble des isométries de $\mathbf{R}^3$ est un groupe pour la composition des applications. (Remarque : cela reste vrai pour l'ensemble des isométries surjectives de n'importe quel espace métrique).

Exercice 3

Un homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ est une bijection $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ telle que f et f^{-1} sont continues. Montrer que l'ensemble des homéomorphismes de $\mathbf{R}^3$ est un groupe pour la composition des applications. (Remarque : cela reste vrai pour l'ensemble des homéomorphismes de n'importe quel espace métrique).

Exercice 4

On dit que $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ est une application affine s'il existe une application linéaire $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ et un vecteur $b \in \mathbf{R}^n$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}^m$, $f(x) = Ax + b$.

1) Montrer que f est bijective si et seulement si A est bijective.

2) Montrer que l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même est un groupe pour la composition des applications. Ce groupe est appelé le groupe affine de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 5

Une homographie de $\mathbf{C}$ est une application de la forme $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ (c'est une application de $\mathbf{C} \cup \infty$ dans lui-même).

a) Montrer que la composition de deux homographies est une homographie.

b) Donner une condition pour qu'une homographie soit inversible.

c) Montrer que les homographies inversibles forment un groupe pour la composition.

Exercice 6

On étudie les configurations de N particules $1, 2, \ldots, N$ dans l'espace $E = \mathbf{R}^3$. On note $x_i \in E$ la position de la particule i. Une configuration est un N-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in E^N$. On dit que deux configurations $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ sont équivalentes s'il existe une permutation σ of $\{1, 2, \ldots, N\}$ telle que pour tout $i = 1, 2, \ldots, N$, $y_i = x_{\sigma(i)}$.

a) Montrer qu'on a bien une relation d'équivalence R sur $X = E^N$.

b) Déterminer l'espace quotient X/R.