Université d'Orléans 16 Mars 2018
Département de Mathématiques
L2MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen Partiel
Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

Donner l'énoncé du théorème de Sylvester sur les formes quadratiques réelles.

Exercice 1

Soient $E = \mathbf{R}^4$, $\mathcal{B}_0 = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4)$ la base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*, \epsilon_4^*)$ sa base duale.

On considère la forme quadratique sur E définie par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 4yt.$$

On notera f la forme polaire de q. On considère également les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sur E définies par

$\varphi_1(x, y, z, t) = x - y - z$

$\varphi_2(x, y, z, t) = y + t$

$\varphi_3(x, y, z, t) = y - t$

$\varphi_4(x, y, z, t) = z.$

1. Déterminer la matrice A de q dans la base $\mathcal{B}_0$.

2. Soit D la droite engendrée par le vecteur $\vec{v} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2$.

   a) Déterminer $D^\perp$. Quelle est sa dimension ?

   b) Donner une base de $D^\perp$.

   c) Déterminer $D^{\perp\perp}$. Quelle est sa dimension ?

   d) D'après la question c), pouvez-vous dire si q est dégénérée ou non ?

3. a) Déterminer les coordonnées de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ dans la base $\mathcal{B}_0^*$.

   b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est une base de E^*

   c) Déterminer la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ de E dont $\mathcal{B}'$ est la base duale.

4. a) Utiliser la méthode de Gauss (en commenant par le terme x^2) pour déterminer la signature de q.

   b) En déduire le rang et le noyau de q.

   c) Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.

TSVP

Exercice 2

Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{E} = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Pour i et j deux entiers compris entre 1 et n, on considère la matrice $E_{i,j}$, élément de $\mathcal{E}$, dont le coefficient sur la ligne i et la colonne j est 1, tous ses autres coefficients étant nuls.

1\. a) Montrer que $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{E}$ et retrouver que la dimension de $\mathcal{E}$ est n^2.

b) Exprimer $E_{i,j}E_{k,l}$ et ${}^tE_{i,j}$ dans la base $\mathcal{B}$ pour toutes les valeurs possibles des couples (i, j) et (k, l), où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

2\. On considère l'application $q : \mathcal{E} \to R$ définie pour tout $A \in \mathcal{E}$ par

$$q(A) = \text{Trace}(({}^tA)\,A),$$

où Trace désigne la trace, c'est-à-dire la somme des coefficients de la diagonale.

a) Montrer que q est une forme quadratique en donnant sa forme polaire f.

b) Calculer les coefficients de la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$. Que pouvez-vous en conclure sur la base $\mathcal{B}$?

3\. Donner la signature, le rang et le noyau de la forme quadratique q. Cette forme quadratique est-elle dégénérée ? définie ?

Exercice 3

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Etant donné $P \in E$, on définit $u(P) = XP'$, où P' est la dérivée du polynôme P, et $\varphi(P) = P''(0)$.

1\. Montrer que u est un endomorphisme de E et que φ est une forme linéaire sur E.

2\. Déterminer le noyau de φ : $H = \text{Ker}(\varphi)$. Quelle est sa dimension ?

3\. Montrer que H est stable par u, c'est-à-dire $u(H) \subset H$.

4\. Montrer que φ est un vecteur propre de ${}^tu$ par les deux méthodes suivantes :

a) en citant un résultat du cours ;

b) en calculant explicitement ${}^tu(\varphi)$.