Université d'Orléans 10 Mars 2017
Département de Mathématiques
L2MT06 Algèbre bilinéaire et espaces euclidiens

Examen Partiel
Documents et calculatrices interdits

Question de cours :

1) Donner la définition d'une base duale.

2) Donner la définition d'une base préduale.

3) Donner une exemple de base duale et un exemple de base préduale.

Exercice 1

Soient $E = \mathbf{R}^4$, $\mathcal{B}_0 = (\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3, \vec{\epsilon}_4)$ la base canonique et $\mathcal{B}_0^* = (\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*, \epsilon_4^*)$ sa base duale.

On considère la forme quadratique sur E définie par

$$q(x, y, z, t) = xy + 2xz + xt - 2yt - 4zt.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.
2. Soit D la droite engendrée par le vecteur $\vec{v} = 2\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2 + \vec{\epsilon}_3 + \vec{\epsilon}_4$.
   a) Déterminer $D^\perp$. Quelle est sa dimension ?
   b) Donner une base de $D^\perp$.
   c) Déterminer $D^{\perp\perp}$. Quelle est sa dimension ?
   d) Que peut-on en déduire sur la dégénérescence de q ?
3. a) Déterminer la signature de q.
   b) En déduire le rang et le noyau de q.
   c) Déterminer une base q-orthogonale et la matrice de q dans cette base.

TSVP

Exercice 2

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ sa base canonique Soit q l'application de E dans $\mathbf{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1. Montrer que q est une forme quadratique en exhibant sa forme polaire.

2. Exprimer $q(P)$ en fonctions des coordonnées (a, b, c) de $P = a + bX + cX^2$.

3. Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_0$.

4. Soient L_0, L_1, L_2 les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux trois points 0, 1 et 2.

a) Donner les expressions de L_0, L_1 et L_2. Que vaut $L_i(j)$ pour $i, j \in \{0, 1, 2\}$?

b) Justifier à l'aide de la question précédente que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, L_2)$ est une base de E.

c) Exprimer $q(P)$ en fonctions des coordonnées (y_0, y_1, y_2) de $P = y_0L_0 + y_1L_1 + y_2L_2$.

d) Déterminer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.

e) Ecrire q comme une combinaison linéaire de carrés d'une famille libre de formes linéaires. En déduire la signature et le rang de q.

Exercice 3

Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension finie n sur une corps K. On note $\text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ le sous-espace vectoriel de E^* engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ et d sa dimension. On pose $F = \bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}\,\varphi_i$.

1. Donner la dimension de F en fonction de n et d.

2. Montrer que si une forme linéaire ψ appartient à $\text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$, alors $F \subset \text{Ker}\,\psi$.

3. On veut montrer la réciproque. Soit ψ une forme linéaire telle que $F \subset \text{Ker}\,\psi$. Quelle est alors la dimension de $\text{Vect}(\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$? En déduire que ψ appartient à $\text{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

4. Soit $u : E \to K^p$ l'application définie par $u(\vec{x}) = {}^t[\varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_p(\vec{x})]$.

a) Montrer que u est linéaire.

b) Montrer que $\text{Ker}\,u = F$.

c) Montrer que l'application transposée de u est ${}^tu : (K^p)^* \to E^*$ définie par

$${}^tu([\lambda_1, \ldots, \lambda_p]) = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_p\varphi_p.$$

d) Montrer que $\psi \in E^*$ appartient à l'image de ${}^tu$ si et seulement si elle vérifie $\psi(\vec{x})$=0 pour tout $\vec{x} \in \text{Ker}\,u$.